





ELEMENTE

DER

THEORIE DER FUNKTIONEN

EINER

COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE.

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG

DER SCHÖPFUNGEN RIEMANN'S

BEARBEITET VON

DR. H. DURÈGE,

ORDENTL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PRAG.

DRITTE VERBESSERTE AUFLAGE.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.



Vorrede.

In der vorliegenden neuen Auflage haben, abgesehen von zahlreichen kleineren Abänderungen, namentlich die folgenden Partieen eine Vermehrung oder Umgestaltung erfahren. Bei der Einführung der *Riemann*'schen Flächen wurde in § 14 der in der früheren Auflage fehlende Nachweis geliefert, dafs unter Berücksichtigung des unendlich grofsen Werthes der Variablen die Bildung der *Riemann*'schen Fläche für eine gegebene algebraische Funktion immer möglich ist. In § 25 wurde die Eigenschaft, dafs eine in einem Punkte a einändrige und stetige Funktion für alle Punkte in der Umgebung von a durch eine convergente, nach Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe dargestellt werden kann, schärfer hervorgehoben, und in § 26 die entsprechende Darstellung für den Fall gegeben, dafs die Funktion in einem Punkte eine Unstetigkeit erleidet. Im siebenten Abschnitte wurden die beiden Arten der Unstetigkeit genauer erörtert, die Eigenschaft, dafs eine einwerthige Funktion an einer Unstetigkeitsstelle zweiter Art sowohl unendlich grofs wird, als auch jeden beliebigen Werth annimmt, hervorgehoben, und an einem speziellen Beispiele die Art der Annäherung genauer ermittelt, welche stattfinden mufs, damit die Funktion einen vorgeschriebenen Werth annehme. Es wurde ferner der die beiden Arten der Unstetigkeit charakterisirende Unterschied des Unendlichwerdens von endlicher und unendlich hoher Ordnung dargelegt.

Mannigfache Zusätze erfuhr auch der neunte Abschnitt, welcher von den mehrfach zusammenhängenden Flächen handelt. Der *Riemann*'sche Hauptsatz über diese Flächen erfordert, wenn er so gefafst wird, wie dies gewöhnlich geschieht und auch in § 49 geschehen ist, dafs nämlich bei beiden Zerschneidungsarten lauter einfach zusammenhängende Stücke entstehen, bei seiner weiteren Anwendung noch gewisse Ergänzungen. Solche wurden in § 52 bei der Classification der Flächen und in § 53, V gegeben. Legt

man aber den Hauptsatz in der Fassung zu Grunde, in welcher *Riemann* ihn ursprünglich aufgestellt hat, und bei welcher nur durch die eine Zerschneidungsart lauter einfach zusammenhängende Stücke entstehen, während bei der anderen Zerschneidungsart die entstandenen Stücke beliebig sein können, so werden alle Schwierigkeiten vermieden, und die Folgerungen ergeben sich unmittelbar, ohne noch weitere Hülfsmittel zu erfordern. Dies wurde in einer nachträglichen Bemerkung am Ende des Buches dargelegt. Für den Hauptsatz selbst wurde ein von Herrn *Lippich* gegebener Beweis in § 51 hinzugefügt, welcher sich durch grofse Einfachheit auszeichnet. Derselbe setzt aber die Kenntniss einiger Eigenschaften allgemeiner Liniensysteme voraus, die daher in § 50 erörtert wurden. Diese Betrachtungen machten es zugleich möglich, in § 56 den Nachweis zu liefern, dafs eine *Riemann*'sche Fläche immer dann eine endliche Ordnung des Zusammenhanges hat, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten besitzt, und ihre Randcurven ein endliches Liniensystem bilden. Diese Ordnung konnte auch bestimmt angegeben werden, und zwar allgemein in dem Falle, dafs in einer rings geschlossenen *Riemann*'schen Fläche nur solche Randcurven angebracht sind, durch welche aus der Fläche kein Theil ausgeschieden wird; wenn aber auch Randcurven vorhanden sind, welche Lücken begrenzen, unter der beschränkenden Voraussetzung, dafs die ausgeschiedenen Flächentheile in Ebenen ausgebreitet werden können. Den Schlufs dieses Abschnittes bildet eine von Herrn *Lippich* herrührende Anwendung auf die Erweiterung der *Euler*'schen Relation zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders, für den Fall, dafs dieses eine beliebige Gestalt hat.

Prag, im December 1881.

H. Durège.

Inhalt.

Vierter Abschnitt.

Integrale mit complexen Variabeln.

Fünfter Abschnitt.

Der Logarithmus und die Exponentialfunktion.

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Funktionen.

Siebenter Abschnitt.

Über das unendlich grofs und unendlich klein Werden der Funktionen.

A. Funktionen ohne Verzweigungspunkte. Einwerthige Funktionen.

Achter Abschnitt.

Integrale.

A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

Neunter Abschnitt.

Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

Zehnter Abschnitt.

Von den Periodicitätsmoduln.

Berichtigung.

S. 43 u. 49. In Fig. 11 sind die Buchstaben a und b mit einander zu vertauschen.

Einleitung.

Die Verfolgung der allmäligen Entwickelung der Lehre von den imaginären Gröfsen bietet besonders deswegen ein grofses Interesse dar, weil man hier noch deutlich erkennen kann, mit welchen Schwierigkeiten die Einführung neuer, vorher nicht bekannter, oder wenigstens nicht hinreichend geläufiger Begriffe verbunden ist. Die Zeiten, in welchen die negativen, gebrochenen und irrationalen Gröfsen in die Mathematik eingeführt wurden, liegen uns so ferne, dafs wir uns von den Schwierigkeiten, welche auch die Einführung dieser Begriffe früher gehabt haben mag, keine rechte Vorstellung mehr machen können. Aufserdem ist die Erkenntniss des Wesens der imaginären Gröfsen auch wieder rückwärts für die Erkenntniss der negativen, gebrochenen und irrationalen Gröfsen lehrreich geworden, da ein gemeinsames Band alle diese Gröfsen umschlingt.

Bei den älteren Mathematikern herrschte fast durchgängig die Ansicht, dafs die imaginären Gröfsen unmöglich seien. Man begegnet beim Durchblättern älterer mathematischer Schriften immer wieder dem Ausspruche, dafs das Auftreten imaginärer Gröfsen keine andere Bedeutung habe, als die, die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe darzuthun, dafs diese Gröfsen keinen Sinn hätten, dafs man sich ihrer aber bisweilen mit Nutzen bedienen könne, obgleich die Form der Resultate dann nur eine symbolische sei. In dieser Beziehung ist es interessant, den Entwicklungsgang *Cauchy*'s zu beobachten. Dieser grofse Mathematiker ist neben unserem „*Princeps mathematicorum*“ *Gauss*, welcher zuerst und wohl schon sehr frühe die hohe Bedeutung der imaginären Gröfsen für alle Theile der Mathematik erkannte, als Schöpfer der Lehre von den Funktionen imaginärer Variabeln zu betrachten. Gleichwohl schlofs er sich sowohl in seiner „algebraischen Analysis“, als auch in den „Exercices“ vom Jahre 1844 noch ganz der Ansicht der älteren Mathematiker an. Es heifst dort an einer

Stelle*): „Toute équation imaginaire n'est autre chose que la réprésentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. L'emploi des expressions imaginaires, en permettant de remplacer deux équations par une seule, offre souvent le moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats fort compliqués. Tel est même le motif principal pour lequel on doit continuer à se servir de ces expressions, qui prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est en quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul, qui peut être employé avec succès dans un grand nombre de cas pour rendre beaucoup plus simples non-seulement les formules analytiques, mais encore les méthodes à l'aide desquelles on parvient à les établir."

Diese Worte bezeichnen sehr deutlich den Standpunkt der älteren Mathematiker, der, wie man sieht, mitunter auch noch viel später festgehalten wurde. Fast nur in einer der mathematischen Disciplinen wurden die imaginären Gröfsen von jeher mit berücksichtigt, nämlich in der Lehre von den algebraischen Gleichungen; denn hier war es viel zu wichtig, zugleich auf alle Wurzeln Rücksicht zu nehmen, als dafs das Imaginärwerden der letzteren den Untersuchungen hätte Stillstand gebieten können. Nichtsdestoweniger fanden einzelne Männer, die, wie es scheint, sich mit einer gewissen Vorliebe den imaginären Gröfsen zuwandten, wie *de Moivre, Bernoulli*, die beiden *Fagnano, d'Alembert, Euler* allmälig die diesen Gröfsen innewohnenden ausgezeichneten Eigenschaften auf und bildeten ihre Lehre immer mehr und mehr aus. Doch wurden diese Untersuchungen im ganzen mehr für wissenschaftliche Spielereien, für blofse Curiosa angesehen, und man legte ihnen nur insofern Werth bei, als sie nützliche Hülfsmittel für andere Untersuchungen darboten. Es hat aber auch nicht an solchen gefehlt, welche die imaginären Gröfsen wegen ihrer vermeinten Unmöglichkeit nirgend angewendet wissen wollten**).

---

*) *Cauchy*, Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome III. p. 361.

**) Aussi a-t-on vu quelques géomètres d'un rang distingué ne point goûter ce genre de calcul, non qu'ils doutassent de la justesse de son résultat, mais parce qu'il paraissait y avoir une sorte d'inconvenance à employer des expressions de ce genre qui n'ont jamais servi qu'à annoncer une absurdité dans l'énoncé d'un problême. *Montucla*, Histoire des mathématiques. Tome III. p. 283.

Die Ansicht von der Unmöglichkeit der imaginären Gröfsen ist eigentlich von einem Verkennen des Wesens der negativen, gebrochenen und irrationalen Gröfsen ausgegangen. Da nämlich die Anwendung dieser mathematischen Begriffe auf Geometrie, Mechanik, Physik und zum Theil selbst im bürgerlichen Leben sich so leicht und so von selbst darbot, ja ohne Zweifel in vielen Fällen die Veranlassung zur Untersuchung dieser Gröfsen wurde, so kam es, dafs man in irgend einer dieser Anwendungen das wahre Wesen dieser Begriffe und ihre wahre Stellung im Gebiete der Mathematik zu finden glaubte. Bei den imaginären Gröfsen lag nun eine solche Anwendung nicht so nahe, und wegen der mangelnden Kenntniss derselben glaubte man die imaginären Gröfsen in das Reich der Unmöglichkeit verweisen, ihre Existenz bezweifeln zu müssen. Dabei liefs man aber aufser Acht, dafs die reine Mathematik, die Wissenschaft der Addition, so wichtig auch ihre Anwendungen sind, doch an und für sich mit den letzteren nichts zu thun hat, dafs ihre durch eine vollständige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe in der Definition selbst ihre Existenz begründen, und dafs ihre Sätze wahr sind, gleichviel, ob man von ihnen eine Anwendung machen kann oder nicht. Ob und wann dieser oder jener Satz eine Anwendung finden wird, läfst sich oft nicht vorherbestimmen, und gerade die heutige Zeit ist ja reich genug an Beispielen, dafs sich die wichtigsten, selbst tief in das Leben der Völker eingreifenden Anwendungen an Sätze geknüpft haben, bei deren Entdeckung man sicherlich keine Ahnung von diesen Folgen hatte. So stark war aber allmälig der Glaube an die Unmöglichkeit der imaginären Gröfsen geworden, dafs, als seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Idee auftauchte, die imaginären Gröfsen geometrisch darzustellen*), man nun umgekehrt aus der vermeint-

---

*) Über das Historische in Betreff der geometrischen Darstellung der imaginären Gröfsen vergl. *Hankel*, Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867, S. 81.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs *Abel* und *Jacobi* im Gegensatze zu der Ansicht, dafs erst eine geometrische Darstellung den imaginären Gröfsen eine wirkliche Existenz zu gewähren vermöge, schon in ihren ersten Untersuchungen über die elliptischen Funktionen, also zu einer Zeit, wo jene Darstellung noch so gut wie unbekannt war, unbekümmert um die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer solchen, sich der imaginären Gröfsen unbeschränkt bedienten, in dem vollen Bewufstsein, wie wesentlich die Berücksichtigung derselben sei, und wie unvollständig ihre Untersuchungen ohne dieselben hätten bleiben müssen.

lichen Unmöglichkeit derselben auch die Unmöglichkeit, sie geometrisch darzustellen, folgerte*).

Um die Stellung, welche die imaginären Gröfsen im Gebiete der reinen Mathematik einnehmen, zu erkennen, und um einzusehen, dafs sie mit den negativen, gebrochenen und irrationalen Gröfsen durchaus auf eine Linie zu stellen sind, müssen wir etwas zurückgreifen.

Die ersten mathematischen Begriffe, die sich unmittelbar aus der Grundoperation der Mathematik, der Addition, ergeben, sind diejenigen, die man nach dem heutigen Sprachgebrauche positive ganze Zahlen nennt. Geht man von der Addition zu ihrer Umkehrung, der Subtraktion, über, so stellt sich alsbald die Nothwendigkeit ein, neue mathematische Begriffe einzuführen. Sobald nämlich die Aufgabe entsteht, eine gröfsere Zahl von einer kleineren zu subtrahiren, so kann dieselbe nicht mehr durch eine positive ganze Zahl gelöst werden. Auf einem Standpunkte, auf dem man nur positive ganze Zahlen kennt, hat man daher die Alternative, entweder eine solche Aufgabe als unmöglich, als unlösbar zu bezeichnen, und damit dem Fortschritt der Wissenschaft nach dieser Richtung hin eine Schranke zu setzen, oder aber die Möglichkeit der Auflösung jener Aufgaben dadurch herbeizuführen, dafs man solche mathematische Begriffe, welche die Aufgabe zu lösen vermögen, als neue Begriffe einführt. Auf diese Weise entstehen durch die Subtraktion die negativen Gröfsen als Differenzen zunächst zweier positiver ganzer Zahlen, von denen der Subtrahendus gröfser ist als der Minuendus. Ihre Existenz und Bedeutung für die reine Mathematik ist dann nicht etwa in einem Gegensatze zwischen rechts und links, vorwärts und rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden oder in irgend einer ihrer mannigfaltigen Anwendungen begründet, sondern lediglich in der Definition, durch welche sie eingeführt werden.

Wenngleich nun aber in rein begrifflicher Beziehung in den negativen Gröfsen nichts Unmögliches liegt, so kann es sich doch ereignen, dafs durch das Auftreten von negativen Gröfsen die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe angezeigt wird, nämlich dann, wenn die Natur der Aufgabe zu ihrer Lösung nothwendig positive Grössen erfordert. Ist z. B. folgende Aufgabe gestellt: Man soll 6 Kugeln so in zwei Urnen vertheilen, dafs sich in der

---

*) *Foncenex,* Reflexions sur les quantités imaginaires. Miscellanea Taurinensia. Tome I. p. 122.

einen 8 mehr befinden, als in der andern, so ist darin folgende rein mathematische Aufgabe enthalten: zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 6, und deren Differenz gleich 8 sei. Wird nun nur verlangt, dafs diese Zahlen mathematische Begriffe seien, ohne dieselben auf eine besondere Art von mathematischen Begriffen zu beschränken, und sind ferner vorher die negativen Gröfsen durch ihre Definition begrifflich festgestellt worden, so liegt die Lösbarkeit der rein mathematischen Aufgabe auf der Hand; wie jeder sieht, sind die positive Zahl 7 und die negative Zahl — 1 diejenigen Gröfsen, welche der Aufgabe genügen. Nichtsdestoweniger ist die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen unmöglich, denn in derselben wird verlangt, dafs jede der gesuchten Zahlen eine Anzahl bedeuten soll, also nothwendig positiv sein mufs. Läge nun die Unmöglichkeit nicht so offen da, wie bei diesem einfachen Beispiele, so würde das Auftreten der negativen Zahl — 1 die Unlösbarkeit der Aufgabe zu Tage bringen.

Ganz dieselben Umstände treten nun bei jeder andern indirekten Operation aufs neue ein. Die nächste indirekte Operation ist die Division. Stellt man die Aufgabe, eine ganze Zahl in eine andere zu dividiren, welche nicht ein Vielfaches der ersteren ist, so entsteht die Unmöglichkeit, diese Aufgabe durch positive oder negative ganze Zahlen zu lösen. Der Fortschritt der Wissenschaft erfordert also wieder, die Möglichkeit der Lösung dadurch herbeizuführen, dafs man die dazu nöthigen Gröfsen einführt und begrifflich feststellt. Diese neuen Begriffe sind hier die rationalen Brüche. Aber auch hier kann der Fall eintreten, dafs das Auftreten derselben die Unmöglichheit der Lösung einer Aufgabe kundgiebt, nämlich wiederum dann, wenn die Natur der Aufgabe die Lösung durch die neuen Begriffe nicht gestattet. Als ein Beispiel diene folgende Aufgabe: Durch ein in einer Maschine oder einem Uhrwerke befindliches Rad, welches 100 Zähne besitzt und in der Minute einmal umläuft, soll unmittelbar ein anderes Rad so in Bewegung gesetzt werden, dafs dieses 12mal in der Minute umläuft; man fragt, wie viele Zähne man dem letzteren Rade geben mufs. Die hier zu Grunde liegende rein mathematische Aufgabe besteht einfach darin, 100 durch 12 zu dividiren, und sind die Brüche einmal begrifflich festgestellt worden, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit, sie liefert $8^1/_3$. Das Auftreten dieses Bruches aber zeigt zugleich die Unmöglichkeit an, die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen, da die zu bestimmende Anzahl der Zähne des zweiten Rades eine ganze Zahl sein mufs.

Die dritte indirekte Operation ist die Wurzelausziehung. Setzt man

$$\sqrt[n]{a} = x,$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeute, so ist die Aufgabe, eine dieser Gleichung entsprechende Gröfse x zu finden, durch ganze Zahlen oder rationale Brüche nicht mehr lösbar, sobald a nicht die $n$te Potenz einer solchen Gröfse ist. In diesem Falle tritt also wieder die Nothwendigkeit ein, die Aufgabe durch Einführung neuer Begriffe lösbar zu machen. Ist nun entweder a positiv, oder wenn a negativ ist, n eine ungerade Zahl, so sind die neu einzuführenden Begriffe die irrationalen Gröfsen; ist aber a negativ und zugleich n eine gerade Zahl, so entstehen als neue Begriffe die imaginären Gröfsen. Es liegt nun ebensowenig die Unmöglichkeit vor, diese letzteren begrifflich festzustellen, wie die irrationalen Gröfsen oder wie früher die rationalen Brüche und die negativen Gröfsen, denn bei keiner der hier aufzustellenden Definitionen stöfst man auf einen inneren Widerspruch. Wenn ein solcher einträte, wenn Eigenschaften mit einander in Verbindung gesetzt würden, von denen bewiesen werden kann, dafs sie nicht mit einander bestehen können, dann allerdings hätte man es wirklich mit etwas Unmöglichem zu thun. *Gauss**) führt als ein Beispiel einer solchen Unmöglichkeit ein ebenes rechtwinkliges gleichseitiges Dreieck an. In der That wird bewiesen, dafs ein ebenes gleichseitiges Dreieck nicht zugleich rechtwinklig sein kann. Hier läge also wirklich etwas Unmögliches vor.

Wenn nun schon das Auftreten von negativen Gröfsen oder von Brüchen bisweilen die Unmöglichkeit einer Aufgabe kund giebt, so ist leicht begreiflich, dafs diese auch durch imaginäre Gröfsen angezeigt werden kann, wie in folgendem Beispiel: Eine gegebene Gerade von der Länge 2 soll in zwei solche Theile getheilt werden, dafs das aus ihnen gebildete Rechteck den Inhalt 4 habe. Der rein mathematische Inhalt dieser Aufgabe ist, zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 2, und deren Produkt gleich 4 ist. Wird nun nur verlangt, dafs diese Zahlen mathematische Gröfsen seien, ohne näher anzugeben, welcher Art sie sein sollen, so hat die Auflösung, nachdem die imaginären Gröfsen einmal begrifflich fest-

---

*) Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. (Inaug.-Diss. pag. 4 Note.)

gestellt worden sind, keine Schwierigkeit. Sie führt auf die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x + 4 = 0,$$

deren Wurzeln die imaginären Zahlen

$$1 + \sqrt{-3} \text{ und } 1 - \sqrt{-3}$$

sind. Nimmt man aber auf die ursprüngliche Aufgabe Rücksicht wonach die gesuchten Gröfsen Theile einer geraden Linie bedeuten sollen und daher reelle Gröfsen sein müssen, dann ist die Aufgabe zu lösen unmöglich, weil das gröfste aus zwei Seiten der Linie 2 gebildete Rechteck den Inhalt 1 hat, und daher keines den Inhalt 4 haben kann; und diese Unmöglicbkeit wird hier durch das Auftreten imaginärer Gröfsen angezeigt. *Montucla**) hat dies nämliche Beispiel als Beleg für die Ansicht gewählt, dafs in der Unmöglichkeit einer Aufgabe überhaupt die Bedeutung und Entstehung der imaginären Gröfsen zu suchen sei, indem sie dann aufträten, wenn man eine Aufgabe stelle, welche eine unmögliche oder absurde Forderung enthalte. Wir haben gesehen, dafs ganz dasselbe auch von den negativen Gröfsen und den Brüchen behauptet werden könnte, und die Worte: „Ainsi toutes les fois que la résolution d'un problème conduit à de semblables expressions et que parmi les différentes valeurs de l'inconnue il n'y en a que de telles, le problème, ou pour mieux dire, ce qu'on demande est impossible." und weiterhin: „Le problème, qui conduirait à une pareille équation, serait impossible ou ne présenterait qu'une demande absurde" lassen sich fast wörtlich auf die beiden früher angeführten Beispicle anwenden, in denen die Unmöglichkeit der Aufgabe durch eine negative Zahl und durch einen Bruch angezeigt wurde.

Aus den vorigen Erörterungen erhellt, dafs die imaginären, die irrationalen, die rational gebrochenen und die negativen Gröfsen eine gemeinsame Entstehungsart haben, nämlich durch die indirekten Operationen, bei welchen ihre Einführung durch den Fortschritt der Wissenschaft nothwendig gemacht wird. Sie alle finden ihre Existenz in ihrer Definition begründet, welche bei keiner etwas Unmögliches in sich schliefst; bei allen aber kann es Fälle geben, wo ihr Auftreten wegen der besonderen Natur der Aufgabe die Unmöglichkeit, diese zu lösen, kund giebt.

Ehe wir nun zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, sei noch eine Bemerkung über das Rechnen mit den imaginären

---

*) Histoire des mathématiques. Tome III. pag. 27.

Gröfsen erlaubt. Auch hier können wir wieder an die ihnen verwandten Gröfsen anknüpfen. Jedesmal, wenn in die Mathematik ein neuer Begriff eingeführt wird, ist es an und für sich in vieler Beziehung eine Sache der Willkür, in welcher Weise man die Operationen, denen man die früheren Begriffe unterwirft, auf den neuen Begriff übertragen will. Nachdem z. B. die Definition der Potenzen mit ganzen positiven Exponenten aus der wiederholten Multiplikation einer Gröfse mit sich selbst hergeleitet ist, entsteht die Frage, was man unter einer Potenz mit einem negativen Exponenten zu verstehen habe. An und für sich ist dieses ganz willkürlich, indem es nichts giebt, was uns zwingt, etwas Bestimmtes darunter zu verstehen. Allein, wenn man hier und in allen ähnlichen Fällen ganz willkürlich verfahren wäre und sich nicht an eine bestimmte Norm gebunden hätte, so würde das mathematische Gebäude gewifs eine seltsame, die Übersicht gewaltig erschwerende Gestalt erhalten haben. Die äufsere Consequenz und die harmonische Übereinstimmung in allen ihren Theilen verdankt die Mathematik der Befolgung des Grundsatzes, dafs man jedesmal, wenn man einen neu eingeführten Begriff den früher bekannt gewordenen Operationen unterwirft, die von diesen Operationen geltenden Hauptsätze auch dann noch als fortbestehend annimmt, wenn man jene auf die neuen Begriffe überträgt. Diese an und für sich willkürliche Annahme ist so lange zu machen erlaubt, als daraus nicht Widersprüche entstehen*). Wenn nun dieser Grundsatz befolgt wird, dann sind die Definitionen, von denen oben die Rede war, nicht mehr willkürlich, sondern ergeben sich als nothwendige Folge jenes Grundsatzes. Bei den Potenzen wird z. B. bewiesen, dafs, wenn m und n zwei positive ganze Zahlen sind, und $m > n$ angenommen wird,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ist. Nun wird willkürlich festgesetzt, dafs dieser Satz auch dann noch richtig bleibe, wenn $m < n$, also $m - n = -p$ eine negative Zahl ist; und dann folgt, dafs man

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

zu setzen habe, wodurch die Bedeutung einer Potenz mit einem negativen Exponenten nun bestimmt festgestellt ist.

*) Dies ist dasselbe, was später von *Hankel* als das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze bezeichnet worden ist. (Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867. S. 11.)

Dafs der obige Grundsatz, trotzdem dafs seine Annahme durchaus nicht nothwendig, sondern willkürlich ist, für die Mathematik die gröfste Wichtigkeit besitzt, bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen, wie das System der Mathematik beschaffen sein würde, wenn jener Grundsatz nicht befolgt wäre, um sofort zu erkennen, welche Unterscheidungen man bei jedem Schritte zu machen gezwungen wäre, und wie schwerfällig alsdann der Gang der Beweise sein würde. Die durch diesen Grundsatz herbeigeführte in weiter Ausdehnung stattfindende Allgemeingültigkeit der mathematischen Sätze läfst auch eine andere Erscheinung in der Geschichte der Mathematik begreifen, nämlich die eine Zeit lang so weit auseinandergehenden Ansichten über die Bedeutung der divergenten Reihen. Da man gewohnt war, fast alle mathematischen Sätze als allgemein gültig zu betrachten, so bedurfte es längerer Zeit, bis die Überzeugung durchdrang, dafs bei den Reihenentwickelungen die Resultate nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen Geltung haben, und dafs überhaupt bei der Einführung des Unendlichen in die Mathematik jener Grundsatz nicht so unbedingt zur Anwendung gebracht werden darf, wie sonst.

Bei der Übertragung der mathematischen Operationen auf die imaginären Gröfsen findet nun aber der obige Grundsatz volle Anwendung, und es ist vollständig nachgewiesen, dafs dabei keinerlei Widersprüche eintreten. Es liegt nicht in der Absicht, diesen Nachweis hier zu wiederholen; erwähnt mag aber werden, dafs jener Grundsatz, obwohl sonst stets befolgt, doch gerade bei den imaginären Gröfsen nicht von jeher und allgemein anerkannt wurde. Noch zu *Euler's* Zeit waren die Mathematiker gar nicht darüber einig, was man unter dem Produkt zweier Quadratwurzeln aus negativen Gröfsen zu verstehen habe. *Euler* selbst setzte obigem Grundsatze gemäfs, und wie jetzt allgemein angenommen wird, wenn a und b zwei positive Gröfsen bedeuten,

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab},$$

also das Produkt dieser beiden imaginären Gröfsen einer reellen Gröfse gleich. Dies wurde aber nicht allgemein anerkannt, vielmehr glaubte *Emerson*, ein englischer Mathematiker, dafs man annehmen müsse, es sei

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-ab},$$

weil es absurd sei, anzunehmen, dafs das Produkt zweier unmöglicher Gröfsen nicht auch unmöglich sei; und *Hutton* sagt in seinem

mathematischen Wörterbuche*), dafs zu seiner Zeit die Ansichten der Mathematiker hierüber ziemlich gleich getheilt seien.

* * *

Eine der bemerkenswerthen Eigenschaften, welche die imaginären Gröfsen besitzen, ist die, dafs man alle auf eine einzige, nämlich auf die Gröfse $\sqrt{-1}$ zurückführen kann, für welche *Gauss* den jetzt allgemein gebräuchlichen Buchstaben i eingeführt hat**). Mittelst derselben läfst sich ferner jede imaginäre Gröfse z auf die Form

$$z = x + iy$$

bringen, in welcher x und y reelle Gröfsen bedeuten. Eine Gröfse von dieser Form hat *Gauss* eine complexe Gröfse genannt***), indem er diesen Namen der allgemeinen Bedeutung, wonach derselbe eine irgend wie aus ungleichartigen Theilen zusammengesetzte Gröfse bezeichnete und in dieser Bedeutung früher hie und da angewendet wurde, entkleidete und ihn zur Bezeichnung der besonderen ungleichartigen Zusammensetzung verwendete, bei welcher eine Gröfse aus einem reellen und einem imaginären Theile, die durch Addition verbunden sind, besteht.

Die complexen Gröfsen umfassen zugleich die reellen mit, nämlich in dem Falle, dafs die reelle Gröfse y den Werth Null hat. Wenn dagegen die andere reelle Gröfse x gleich Null ist, also z die Form

$$z = iy$$

hat, pflegt man die complexe Gröfse rein imaginär zu nennen.

Wenn in der Gröfse $z = x + iy$ die beiden reellen Gröfsen x und y, oder mindestens eine von ihnen, veränderlich ist, so nennt man z eine complexe veränderliche Gröfse. Damit eine solche den Werth Null erhalte, ist erforderlich, dafs beide reelle Gröfsen x und y zugleich verschwinden, weil es nicht möglich ist, dafs sich die beiden ungleichartigen Gröfsen, die reelle, x, und die imaginäre, iy, gegenseitig aufheben. Dagegen genügt es zum Unendlichwerden der complexen Gröfse z, wenn nur einer ihrer beiden reellen Bestandtheile, x oder y, unendlich wird. Ebenso tritt in z eine andere Unterbrechung der Stetigkeit ein, sobald nur eine der reellen Gröfsen x oder y eine solche erleidet. So lange aber x

---

*) *Hutton*, Mathematical dictionary. 1796.

**) Die erste Stelle, in welcher diese Bezeichnung angewendet ist, findet sich: Disquisitiones arithmeticae. Sect. VII. Art. 337.

***) Theoria residuorum biquadraticorum. Comment. societatis Gottingensis. Vol. VII (ad 1828—32) pag. 96.

und y beide sich stetig ändern, nennt man auch z eine stetig veränderliche complexe Gröfse.

Schon die Betrachtnng der reellen Veränderlichen und ihrer Funktionen wird durch die geometrische Darstellung derselben wesentlich erleichtert und anschaulich gemacht. Dies ist nun in erhöhtem Maafse bei den complexen Veränderlichen der Fall; daher wollen wir uns zuerst mit der Art und Weise beschäftigen, wie man imaginäre Gröfsen bildlich darstellen kann.

Erster Abschnitt.

Geometrische Darstellung der imaginären Gröfsen.

§ 1.

Um sich von einer reellen veränderlichen Gröfse ein geometrisches Bild zu machen, denkt man sich bekanntlich einen Punkt, der sich auf einer geraden Linie bewegt. Auf derselben, die wir die x-Axe oder auch die Haupt-Axe nennen wollen, nimmt man einen festen Punkt o (den Nullpunkt) an und stellt den Werth einer veränderlichen Gröfse x durch den Abstand $\overline{op}$ eines auf der x-Axe liegenden Punktes p vom Nullpunkte o dar. Dabei nimmt man zugleich auf die Richtung, in welcher die Strecke $\overline{op}$ von o aus gerechnet liegt, Rücksicht, indem ein positiver Werth von x durch eine Strecke $\overline{op}$ nach der einen Seite (etwa nach rechts, wenn man sich die x-Axe horizontal liegend denkt), ein negativer Werth von x dagegen durch eine Strecke $\overline{op'}$ nach der andern Seite (nach links) repräsentirt wird. Wenn nun x seinen Werth ändert, so ändert sich auch die Strecke $\overline{op}$, indem der Punkt p seine Lage auf der x-Axe ändert. Man kann daher entweder sagen, dafs durch jeden Werth von x die Lage eines Punktes p auf der x-Axe gegeben ist, oder dafs durch ihn die Länge einer begrenzten Geraden in einer von zwei einander direkt entgegengesetzten Richtungen bestimmt wird.

Eine complexe veränderliche Gröfse $z = x + iy$ hängt nun von zwei gänzlich von einander unabhängigen reellen Veränderlichen x und y ab. Zur geometrischen Verbildlichung einer complexen Gröfse wird daher ein Gebiet einer Dimension, eine gerade Linie, nicht mehr ausreichen, sondern es wird dazu eines Gebietes von zwei Dimensionen, einer Ebene, bedürfen. Man kann nun die Art der Veränderlichkeit einer complexen Gröfse dadurch wieder-

geben, dafs man annimmt, es werde durch einen complexen Werth $z = x + iy$ ein Punkt p der Ebene in der Weise bestimmt, dafs seine rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf zwei in der Ebene fest angenommene Coordinaten-Axen die Werthe der reellen Gröfsen x und y haben. Zuerst nämlich schliefst diese Darstellungsweise die der reellen Veränderlichen in sich, denn sobald z reell, also $y = 0$ ist, liegt der darstellende Punkt p auf der x-Axe. Es können sich ferner die Coordinaten des Punktes p gerade wie die veränderlichen Gröfsen x und y, jede von der anderen ganz unabhängig ändern, sodafs der Punkt p seine Lage in der Ebene nach allen Richtungen hin ändern kann. Es kann auch eine der beiden Gröfsen x und y constant bleiben, während nur die andere ihren Werth ändert, in diesem Falle würde der Punkt p eine der x- oder der y-Axe parallele Gerade beschreiben. Endlich ist auch umgekehrt für jeden Punkt der Ebene der zugehörige Werth von z vollständig bestimmt, da durch die Lage des Punktes p seine beiden rechtwinkligen Coordinaten; also auch die Werthe von x und y gegeben sind.

Statt die Lage des die Gröfse z darstellenden Punktes durch rechtwinklige Coordinaten x und y zu bestimmen, kann dies auch durch Polarcoordinaten geschehen. Setzt man nämlich

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi,$$

so folgt

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Alsdann giebt die reelle und stets positiv zu nehmende Gröfse r, welche der Modul der complexen Gröfse z genannt wird, die absolute Länge der Strecke $\overline{op}$ (Fig. 1), und φ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe an. Man kann daher auch sagen, dafs eine complexe Gröfse $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ eine gerade Linie ihrer Länge und Richtung nach darstellt, nämlich eine gerade Linie, deren Länge $= r$ ist, und die mit der Hauptaxe einen Winkel $= \varphi$ bildet. Die von diesem Winkel, also von der Richtung allein abhängige Gröfse

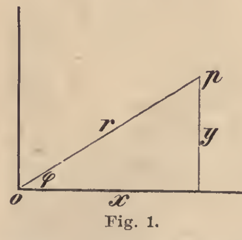


Fig. 1.

$$\cos \varphi + i \sin \varphi$$

pflegt dann der Richtungscoefficient der complexen Gröfse z genannt zu werden.

Ebenso wie beliebig liegende begrenzte gerade Linien ohne Rücksicht auf ihre Richtung und Lage in der Ebene, oder höch-

stens mit Berücksichtigung von einander direkt entgegengesetzten Richtungen durch reelle Zahlen ausgedrückt werden, so können nun durch complexe Zahlen gerade Linien ausgedrückt werden, welche sowohl ihrer Länge als auch ihrer Richtung nach bestimmt sind, auf deren Lage in der Ebene es aber weiter nicht ankommt. Zwei begrenzte gerade Linien in einer Ebene unterscheiden sich nämlich eigentlich vollständig in drei Stücken, in ihrer Länge, ihrer Richtung und ihrer Lage, d. h. der Lage desjenigen Punktes, von welchem man die Strecke als beginnend annimmt. Man kann nun aber von zweien dieser Unterscheidungsmerkmale abstrahiren und zwei Strecken als gleich betrachten, wenn sie nur gleiche Länge haben; dies geschieht bei der Darstellung der Strecken durch reelle Gröfsen. Bei der Darstellung durch complexe Gröfsen aber abstrahirt man nur von dem dritten Unterscheidungsmerkmal, der Lage, und nennt zwei Strecken dann und nur dann gleich, wenn sie sowohl gleiche Länge als auch gleiche Richtung haben.

Da der Modul einer complexen Gröfse die absolute Länge der geraden Linie angiebt, welche jene Gröfse repräsentirt, so ist derselbe dem absoluten Werthe einer negativen Gröfse analog und dient als Maafs bei der Vergleichung complexer Gröfsen unter einander.

§ 2.

Die Eigenschaft complexer Gröfsen, dafs eine Verbindung zweier oder mehrerer derselben durch mathematische Operationen immer wieder auf eine complexe Gröfse führt, hat zur Folge, dafs, wenn man gegebene complexe Gröfsen durch Punkte darstellt, das Resultat ihrer Verbindung sich wieder durch einen Punkt darstellen läfst. Wir wollen nun im Folgenden die vier ersten algebraischen Operationen, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchgehen und untersuchen, wie sich die aus diesen hervorgehenden Punkte geometrisch finden lassen. Dabei sollen die einzelnen Punkte immer mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, wie die durch sie dargestellten complexen Gröfsen; der Nullpunkt, welcher den Werth Null darstellt, werde mit o bezeichnet.

1. Addition.

Sind

$$u = x + iy \text{ und } v = x' + iy'$$

zwei complexe Gröfsen, und bezeichnet man mit w ihre Summe, so ist

$$w = u + v = (x + x') + i(y + y').$$

Der Punkt w hat also die Coordinaten $x + x'$ und $y + y'$. Daraus folgt, dafs er der vierte Eckpunkt des Parallelogramms ist, das aus den Seiten $\overline{ou}$ und $\overline{ov}$ gebildet werden kann, oder dafs durch die Gröfse $u + v$ die Diagonale $\overline{ow}$ dieses Parallelogramms nach Gröfse und Richtung dargestellt wird (Fig. 2). Da die Geraden $\overline{uw}$ und $\overline{ov}$ gleich und direkt parallel sind, und daher $\overline{uw}$ ebenfalls durch die complexe Gröfse v dargestellt wird, so gelangt man zu dem nämlichen Punkte w, wenn man an den Endpunkt u der ersten Geraden, $\overline{ou}$, die zweite $\overline{ov}$ in ihrer gegebenen Richtung und Länge anfügt. Diese Art der Zusammensetzung oder geometrischen Addition gerader Linien ist auch unabhängig von der Betrachtung imaginärer Gröfsen von *Möbius**) angewendet worden. Die Summe $u + v$ ist hiernach die dritte Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten durch u und v dargestellt werden. Da nun in jedem Dreiecke eine Seite kleiner ist, als die Summe der beiden anderen, und die Längen der Seiten durch die Moduln der complexen Gröfsen angegeben werden, so folgt der Satz: dafs der Modul der Summe zweier complexer Gröfsen kleiner ist, als die Summe ihrer einzelnen Moduln:

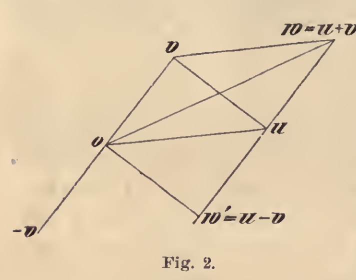


Fig. 2.

$$\text{mod}\,(u + v) < \text{mod}\,u + \text{mod}\,v.$$

Die complexe Gröfse $z = x + iy$ erscheint selbst unter der Form einer Summe aus der reellen Gröfse x und der rein imaginären iy; da erstere einen Punkt der x-Axe, letztere einen Punkt der y-Axe darstellt, so ist z wirklich der vierte Eckpunkt des Rechtecks, dessen Seiten von der Abscisse x und der Ordinate y des Punktes z gebildet werden.

2. Subtraktion.

Die Subtraktion zweier Punkte ergiebt sich leicht aus der Addition; denn soll

$$w' = u - v$$

sein, so folgt

$$u = v + w';$$

also mufs der Punkt w' so liegen, dafs $\overline{ou}$ die Diagonale des aus

*) *Möbius*, Über die Zusammensetzung gerader Linien, etc. Crelle's Journ. Bd. 28. S. 1.

$\overline{ov}$ und $\overline{ow'}$ gebildeten Parallelogramms wird (Fig. 2). Demnach erhält man w', wenn man $\overline{ow'}$ der Geraden $\overline{vu}$ gleich und direkt parallel zieht. Da es nun wieder auf die Lage einer Geraden nicht ankommt, sondern nur auf ihre Länge und Richtung, so stellt die Differenz $u - v$ die Gerade $\overline{vu}$ ihrer Länge und Richtung nach (nämlich von v nach u) dar. Die Construktion zeigt, dafs u in der Mitte der Geraden $\overline{ww'}$ liegt. Nun folgt aber aus

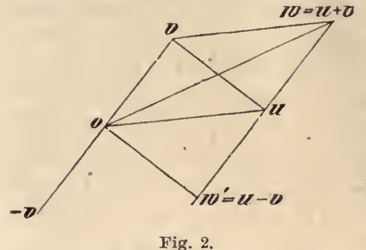


Fig. 2.

$$w = u + v, \qquad w' = u - v$$

$$u = \frac{w + w'}{2},$$

also bildet der Punkt $\frac{w + w'}{2}$ den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Punkte w und w'.

Fällt der Punkt u mit dem Nullpunkte zusammen, d. h. ist $u = 0$, so wird $w' = -v$. In diesem Falle hat man von o aus eine der Geraden $\overline{vo}$ in Richtung und Länge gleiche Gerade zu ziehen, daher liegt der Punkt $-v$ dem Punkte v diametral gegenüber und in gleicher Entfernung vom Nullpunkte wie der letztere.

Die Subtraktion bietet ein Mittel dar, Punkte auf einen andern Nullpunkt zu beziehen. Denn es leuchtet ein, dafs ein Punkt z zu einem Punkte a gerade so liegt, wie $z - a$ gegen den Nullpunkt (Fig. 3). Setzt man dann

$$z - a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so bedeutet r die Entfernung $\overline{az}$, und φ die Neigung der Geraden $\overline{az}$ gegen die Hauptaxe. Die Einführung von $z' = z - a$ oder die Substitution von $z + a$ für z verlegt also den Nullpunkt nach a, ohne jedoch die Richtung der Hauptaxe zu ändern.

Fig. 3.

3. Multiplikation.

Wir benutzen hier den Ausdruck der complexen Gröfsen durch Polarcoordinaten. Seien

$$u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ und } v = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

zwei durch ihre Polarcoordinaten gegebene Punkte, und w ihr Produkt, so ist

$$w = u \cdot v = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')].$$

Demnach bildet der Radius Vektor von w mit der Hauptaxe den Winkel $\varphi + \varphi'$, und seine Länge ist gleich dem Produkt der Zahlen r und r', welche die Längen der Radien Vektoren von u und v angeben. Hieraus geht hervor, dafs die Lage des Punktes w oder $u \cdot v$ wesentlich von der als Längeneinheit angenommenen Geraden abhängt, während die Lage von $u + v$ und $u - v$ von dieser Längeneinheit unabhängig ist. Dies liegt auch ganz in der Natur der Sache, denn vergröfsert man in u und v die Längeneinheit in dem Verhältnisse von 1 zu ϱ, wo ϱ irgend eine reelle Zahl bedeute, so werden die Radien Vektoren von $u + v$ und $u - v$ in demselben Verhältnisse vergröfsert, der Radius Vektor von $u \cdot v$ dagegen im Verhältnisse von 1 zu ϱ^2. Man nehme daher auf der positiven Seite der Hauptaxe einen Punkt 1 so liegend an, dafs $\overline{o1}$ gleich der angenommenen Längeneinheit ist (Fig. 4). Da alsdann aus der Gleichung

$$\overline{ow} = r \cdot r'$$

die Proportion

$$1 : r = r' : \overline{ow}$$

oder

$$\overline{o1} : \overline{ou} = \overline{ov} : \overline{ow}$$

folgt, und aufserdem

$$\angle vow = 1ou$$

ist, so ist die Lage des Punktes w dadurch zu construiren, dafs man die Dreiecke vow und $1ou$ gleichstimmig ähnlich macht. Statt dessen könnte man natürlich auch die Dreiecke uow und $1ov$ gleichstimmig ähnlich machen, was sich analytisch dadurch manifestirt, dafs man in dem Produkt $u \cdot v$ die Faktoren mit einander vertauschen kann. Aus der Gleichung

$$w = u \cdot v$$

kann man ebenfalls eine Proportion ziehen, nämlich

$$1 : u = v : w;$$

daher stehen die Geraden $\overline{o1}$, $\overline{ou}$, $\overline{ov}$, $\overline{ow}$, auch wenn man ihre Richtung berücksichtigt, in Proportion. In Verbindung mit dem vorigen ergiebt sich aber hieraus, dafs, wenn gerade Linien nicht blofs in Rücksicht ihrer Länge, sondern auch in Rücksicht ihrer

Richtung mit einander verglichen werden, zwei Paare solcher Geraden dann und nur dann in Proportion stehen, wenn sie nicht blofs ihrer Länge nach proportional sind, sondern auch paarweise gleiche Winkel einschliefsen; oder mit anderen Worten, wenn sie entsprechende Seiten zweier gleichstimmig ähnlicher Dreiecke sind. Berücksichtigt man nun dieses Erforderniss, so kann die zuletzt aufgestellte Proportion dazu dienen, um auf die einfachste Weise zu finden, welche Dreiecke man einander ähnlich zu machen habe.

Fig. 4.

Ist in dem Produkte $u \cdot v$ der eine der beiden Faktoren reell, z. B. v, und bezeichnen wir ihn in diesem Falle durch α, so liegt der Punkt α auf der Hauptaxe, und daher ergiebt die vorher angegebene Construktion, dafs der Punkt $\alpha \cdot u$ auf der Geraden $\overline{ou}$ liegt und zwar so, dafs sein Radius Vektor das α-fache des Radius Vektors von u ist.

Hiernach ist die geometrische Bedeutung der Multiplikation folgende: Wird eine Gröfse u mit einer reellen Gröfse α multiplicirt, so wird dadurch nur der Radius Vektor von u im Verhältnisse von 1 zu α vergröfsert; wird aber u mit einer complexen Gröfse v multiplicirt, so wird der Radius Vektor von u nicht blofs im Verhältnisse von 1 zu mod v vergröfsert, sondern auch zugleich um den Neigungswinkel von v nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

4. Division.

Diese erledigt sich unmittelbar durch die vorigen Ergebnisse. Denn soll

$$w' = \frac{u}{v}$$

sein, so zieht man hieraus die Proportion

$$w' : 1 = u : v$$

und hat daher die Dreiecke $w'o1$ und uov gleichstimmig ähnlich zu machen (Fig. 4). Die geometrische Ausführung der Division von u durch v besteht also darin, dafs der Radius Vektor von u im Verhältnisse von mod v zu 1 geändert und zugleich um den

Neigungswinkel von v nach der Richtung gedreht wird, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen.

Wir wenden nun die vorigen Betrachtungen noch auf zwei Aufgaben an, die uns später von Nutzen sein werden.

Erstens. Seien z, z' und a drei gegebene Gröfsen, also auch drei gegebene Punkte; man soll einen vierten Punkt w so bestimmen, dafs

$$w = \frac{z' - z}{z - a}$$

ist (Fig. 5). Setzt man $z' - z = u$, $z - a = v$, so findet man zuerst die Punkte u und v, indem man $\overline{ou}$ gleich und parallel $\overline{zz'}$ und $\overline{ov}$ gleich und parallel $\overline{az}$ zieht. Nun ist $w = \frac{u}{v}$ oder $w:1 = u:v$; daher erhält man w, wenn man

$$\triangle\, wo1 \sim uov$$

macht. Hieraus kann nun auch ein Ausdruck für die Gröfse w abgeleitet werden, der aus den Seiten $\overline{zz'}$ und $\overline{az}$ und dem Winkel azz' des Dreieckes azz' gebildet ist. Bezeichnet man nämlich diesen Winkel mit α, so ist

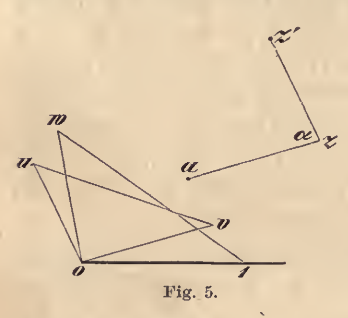


Fig. 5.

$$< 1ow = vou = 180^0 - \alpha.$$

Ferner ist

$$\overline{ow} = \frac{\overline{ou}}{\overline{ov}} = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}},$$

folglich ist der Modul von w gleich $\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}$, und der Richtungscoefficient gleich $(-\cos\alpha + i\sin\alpha)$, und man hat

$$w = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}(-\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

In dem speziellen Falle, dafs $\overline{az}$ senkrecht auf $\overline{zz'}$ steht, ist $\alpha = 90^0$, und dann erhält man

$$w = i\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}.$$

Zweitens: In welcher Beziehung stehen zweimal drei Punkte z, z', z'' und w, w', w'', wenn zwischen ihnen die Gleichung

$$\frac{z' - z}{z'' - z} = \frac{w' - w}{w'' - w}$$

besteht? (Fig. 6). Man hat hier unmittelbar die Proportion

$$z' - z : z'' - z = w' - w : w'' - w;$$

und da die Differenzen die Abstände der entsprechenden Punkte in Bezug auf Länge und Richtung bedeuten, so folgt augenblicklich, dafs die Dreiecke

$$z'zz'' \text{ und } w'ww''$$

gleichstimmig ähnlich sind.

Wir brechen diese Betrachtungen hier ab, indem wir die Construktion der Potenzen, als für unsere Zwecke nicht nothwendig, übergehen. Bei reellen ganzen Exponenten ergiebt sich dieselbe übrigens unmittelbar aus einer wiederholten Anwendung der Multiplikation*). Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Wenn man irgend eine analytische Beziehung zwischen beliebigen Gröfsen hat und die auf beiden Seiten der Gleichung vorkommenden analytischen Operationen geometrisch ausführt, so wird man durch zwei verschiedene Constructionen zu dem nämlichen Punkte geführt. Daher ist in jeder analytischen Gleichung zugleich ein geometrischer Satz enthalten. So überzeugt man sich z. B. leicht, dafs die Identität

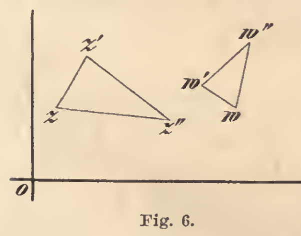


Fig. 6.

$$\frac{u+v}{2} = v + \frac{u-v}{2}$$

den Satz liefert, dafs die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbiren**). Man kann u. a. auch den Unterschied zwischen einer convergenten und einer divergenten Reihe durch eine geometrische Construktion sehr anschaulich machen. Bekanntlich hat die geometrische Reihe

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\cdots$$

*) Für beliebige Potenzen möge auf einen Aufsatz: „Über die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten" (*Schlömilch*'s Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. V. S. 345) verwiesen werden.

**) Über die weitere Ausführung der hiermit zusammenhängenden Betrachtungen sei auf die bemerkenswerthe Abhandlung von *Siebeck*: Über die graphische Darstellung imaginärer Funktionen (Crelle's Journ. Bd. 55. S. 221) verwiesen.

den Werth $\frac{1}{1-z}$ nur dann zur Summe, wenn mod $z < 1$ ist. Nimmt man nun einen beliebigen Punkt z an, construirt auf die im Früheren angegebene Weise die Punkte $1, 1+z, 1+z+z^2, 1+z+z^2+z^3$, u. s. w. und verbindet alle diese Punkte durch gerade Linien, so erhält man eine gebrochene Spirallinie. Liegt dann der Punkt z so, dafs mod $z < 1$, d. h. $\overline{oz} < 1$ ist, so nähern sich die Punkte dieser Spirallinie auf immer enger werdenden Windungen demjenigen Punkte, den man auch durch Construktion von $\frac{1}{1-z}$ erhält. Ist aber mod $z \geqq 1$, so erweitern sich die Windungen der Spirallinie immer mehr, und eine Annäherung an einen bestimmten Punkt findet nicht statt.

§ 3.

Die besprochene Art, complexe Werthe durch Punkte in einer Ebene geometrisch darzustellen, gewährt nun auch ein anschauliches Bild von einer complexen stetig veränderlichen Gröfse. Denkt man sich nämlich eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe von $z = x + iy$, also auch eine Reihe stetig auf einander folgender und zusammengehöriger Werthepaare von x und y, und stellt jeden Werth von z durch einen Punkt dar, so werden diese Punkte ebenfalls eine stetige Aufeinanderfolge, d. h. in ihrer Gesammtheit eine Linie bilden. Wenn daher die Variable z sich stetig ändert, so beschreibt der darstellende Punkt z eine ununterbrochene Linie. Da sich dabei die reellen Veränderlichen x und y jede ganz unabhängig von der andern ändern können, so kann auch der darstellende Punkt z jede beliebige Linie beschreiben. Hierbei verdient besonders hervorgehoben zu werden, dafs es zur Stetigkeit der Veränderung von z durchaus nicht nothwendig ist, dafs die von dem darstellenden Punkte beschriebene Linie eine nach einem und demselben mathematischen Gesetze fortgehende Curve sei, d. h. dafs die ganz beliebige Beziehung, in welcher x und y an jeder Stelle zu einander stehen müssen, immer durch dieselbe Gleichung (oder überhaupt durch eine solche) ausdrückbar sei. Damit die Veränderung von z stetig vor sich gehe, ist nur erforderlich, dafs die Linie einen ununterbrochenen Zug bilde. Einige Beispiele mögen dies erläutern. Denken wir uns, die Veränderliche z beginne ihre Veränderung mit dem Werthe $z = 0$ und gelange, nachdem sie eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, zu einem reellen positiven Werthe a, welcher durch den Punkt a (Fig. 7) auf der x-Axe dargestellt werden möge,

indem die Entfernung $\overline{oa} = a$ sei. Nun kann die Veränderliche z (so drücken wir uns kurz aus, anstatt zu sagen: der bewegliche Punkt, welcher den jedesmaligen Werth der Variablen z darstellt) auf sehr verschiedenen Wegen von o nach a gelangen. Erstlich kann sie zwischen o und a nur reelle Werthe annehmen; dann bleibt y constant $= 0$, und x wächst von 0 bis a.

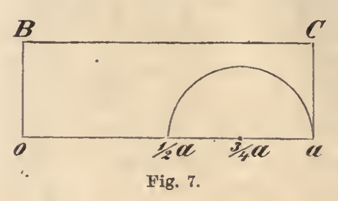


Fig. 7.

Die Variable beschreibt die Gerade $\overline{oa}$. Zweitens durchlaufe die Variable z die aus drei Seiten eines Rechtecks bestehende gebrochene Linie $oBCa$, bei welcher $oB = b$ sei. Dann ist x von o bis B constant $= 0$, und y wächst von 0 bis b, sodafs in B $z = ib$ ist; alsdann bleibt y auf dem erlangten Werthe b stehen, und x wächst von 0 bis a, sodafs z in C den Werth $a + ib$ erlangt; endlich bleibt von C bis a nun x constant $= a$, und y nimmt von b bis 0 ab. Drittens möge die Variable z zuerst auf der Hauptaxe von o bis $^1/_2 a$ gehen und dann einen um den Punkt $^3/_4 a$ als Mittelpunkt mit einem Radius $= {^1/_4} a$ beschriebenen Halbkreis durchlaufen. Wir zeigen an diesem Beispiele zugleich die Verlegung des Nullpunktes. Wegen der um den Punkt $^3/_4 a$ beschriebenen Kreisbewegung wird nämlich der Gang der reellen Variabeln einfacher, wenn man setzt

$$z - {^3/_4} a = z' = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Alsdann werden die Radien Vektoren von dem Punkte $^3/_4 a$ aus gerechnet. Nun ist im Nullpunkte $z = 0$, also $z' = -{^3/_4} a$, und daher $r = {^3/_4} a$, $\varphi = \pi$. Auf dem Wege von o bis $^1/_2 a$ bleibt dann φ constant $= \pi$, und r nimmt von $^3/_4 a$ bis $^1/_4 a$ ab, sodafs beim Beginn des Kreises $z' = -{^1/_4} a$, und daher $z = {^1/_2} a$ ist. Beim Durchlaufen des Kreises bleibt nun r constant $= {^1/_4} a$, und φ nimmt von π bis 0 ab, sodafs in a, $z' = +{^1/_4} a$, also $z = a$ ist. Hierbei haben wir angenommen und werden dasselbe auch in Zukunft immer thun, dafs der Neigungswinkel φ einer complexen Gröfse von der Richtung der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe hin wachse, und wir werden diese Richtung die Richtung der wachsenden Winkel nennen.

Man sieht aus diesen Beispielen, dafs zwischen einer veränderlichen Gröfse, welche nur reelle Werthe annehmen darf, und einer solchen, der man auch imaginäre Werthe anzunehmen gestattet, ein sehr wesentlicher Unterschied stattfindet. Während

durch zwei bestimmte Werthe einer reellen Variablen die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, welche die Veränderliche annehmen mufs, um von dem ersten zum zweiten Werthe zu gelangen, schon mit bestimmt ist, ist dies bei einer complexen Veränderlichen keineswegs der Fall, vielmehr giebt es unendlich viele Reihen stetig auf einander folgender Werthe, welche von einem bestimmten Werthe einer complexen Variablen zu einem andern bestimmten Werthe hinführen. Geometrisch ausgedrückt kann man sagen: eine reelle Veränderliche kann nur auf einem einzigen Wege von einem Punkte zu einem andern gelangen, nämlich nur auf dem zwischen denselben enthaltenen Stücke der Hauptaxe. Eine complexe Variable dagegen kann man, selbst wenn Anfangs- und Endwerth reell sind, aus der Hauptaxe heraustreten, und auf unendlich vielen verschiedenen Linien oder Wegen von einem Punkte zum andern gehen lassen. Wenn Anfangs- und Endwerth, oder nur einer von beiden, complex sind, so gilt natürlich dasselbe; auch dann kann die Variable beliebige Wege einschlagen, um von dem einen Punkte zum andern zu gelangen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Funktionen einer complexen Variablen im Allgemeinen.

§ 4.

Indem wir nun zu der Betrachtung von Funktionen einer complexen Variablen übergehen, knüpfen wir zwar zunächst an den aus den Elementen bekannten Begriff einer Funktion von einer veränderlichen Gröfse an, wonach darunter irgend ein Ausdruck verstanden wird, welcher durch mathematische Operationen, die mit der Variablen vorgenommen werden, gebildet ist; werden aber dann diesen Begriff einer Erweiterung zu unterwerfen haben. In früherer Zeit bezeichnete man mit dem Worte: Funktion einer Gröfse, nur das, was wir jetzt eine Potenz nennen. Erst seit *Johann Bernoulli* wurde diese Benennung in der erweiterten Bedeutung angewendet, dafs damit nicht blos die Potenzirung, sondern jede beliebige mathematische Operation oder jede Combination letzterer bezeichnet wird. In neuerer Zeit ist es nun aber nöthig geworden, den Begriff Funktion aufs neue zu erweitern und von der Existenz eines mathematischen Ausdrucks für dieselbe zu abstrahiren. Wenn man nämlich eine Variable durch eine andere ausgedrückt hat, sodafs

die erstere eine Funktion der letzteren ist, so zeigt sich als das Wesentliche der Verbindung beider, dafs jedem Werthe der einen ein Werth (oder auch mehrere Werthe) der andern entspricht. Diese Zusammengehörigkeit der Werthe der Funktion einerseits und der unabhängigen Variablen andererseits ist es nun, die man vorzugsweise im Auge behält. Sie ist es auch, die überall da hervortritt, wo wir die Abhängigkeit einer Gröfse von einer andern erkennen, ohne jedoch im Stande zu sein, das Gesetz dieser Abhängigkeit durch einen mathematischen Ausdruck wiederzugeben. So kennt man, um an ein bekanntes Beispiel zu erinnern, die Abhängigkeit der Spannung des gesättigten Wasserdampfes von seiner Temperatur vollständig in der Weise, dafs man nach den Beobachtungen und den danach construirten Tabellen innerhalb gewisser Grenzen für jeden Werth der Temperatur des Dampfes seine Spannung angeben kann. Allein eine aus der Theorie abgeleitete Formel, mittelst welcher man für eine gegebene Temperatur die Spannung berechnen könnte, besitzen wir nicht. Trotz des Fehlens eines solchen mathematischen Ausdrucks ist man aber doch berechtigt, die Spannung als eine Funktion der Temperatur zu betrachten, weil zu jedem Werthe der letzteren ein Werth der ersteren gehört. Ähnlich verhält es sich mit den algebraischen Funktionen im allgemeinen Sinne, d. h. mit den Funktionen, welche dadurch entstehen, dafs eine Variable mit einer andern durch eine algebraische Gleichung verbunden ist. Man kann die Gleichungen höherer Grade bekanntlich nicht allgemein auflösen, und daher die eine Variable nicht durch die andere ausdrücken. Da man aber weifs, dafs zu jedem Werthe derselben eine bestimmte Anzahl von Werthen der ersteren zugehören, so kann man die erstere als Funktion der letzteren betrachten. Dazu kommt noch, dafs die Funktionen, mögen sie mathematisch ausdrückbar sein oder nicht, eine, meistens sehr geringe, Anzahl charakteristischer Eigenschaften besitzen, durch die sie vollständig, oder doch bis auf einen constanten Faktor oder eine additive Constante bestimmt sind. Man kann daher dann den Ausdruck der Funktion durch die charakteristischen Eigenschaften derselben ersetzen.

Denkt man sich nun eine Funktion innerhalb eines gewissen Intervalles der Werthe der unabhängigen Variablen nur dadurch bestimmt, dafs zu jedem Werthe der letzteren der zugehörige Werth der ersteren gegeben oder willkürlich angenommen ist, jedoch so, dafs im Allgemeinen stetigen Änderungen der Variablen auch stetige Änderungen der Funktion entsprechen, so tritt ein Unter-

schied ein, je nachdem der Variablen in dem gegebenen Intervalle nur reelle Werthe zuertheilt, oder auch complexe Werthe mit in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Im ersteren Falle, wenn die Variable nur reelle Werthe annimmt, kann man in der That die Werthe der Funktion, welche denen der Variablen zugehören sollen, ganz willkürlich wählen, und die einen den anderen nach der Stetigkeit entsprechen lassen. Man kann dann auch immer einen für das betreffende Intervall gültigen analytischen Ausdruck für die Funktion finden, welche die Werthe der letzteren darstellt; nämlich, wenn dies nicht auf andere Weise möglich sein sollte, so gelingt es doch stets mittelst der Reihen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten. Bekanntlich ist dies sogar dann noch möglich, wenn die Funktion an einzelnen Stellen Unterbrechungen der Stetigkeit erleidet. Wenn nun aber complexe Werthe der Variablen mit in Betracht kommen, dann steht es nicht mehr frei, eine Reihe stetiger complexer Werthe willkürlich zu wählen und diese als die Werthe einer Funktion anzusehen, welche einer stetigen Werthenreihe einer complexen Variablen zugehören. Wir werden auf diesen Punkt später noch näher eingehen; vorläufig wollen wir nur darauf aufmerksam machen, dafs hier der besondere Umstand eintritt, dafs, wenn auch in einer complexen Variablen $w = u + iv$ die Gröfsen u und v Funktionen von den reellen Bestandtheilen x und y der Variablen $z = x + iy$ sind, doch deswegen w noch nicht eine Funktion von z zu sein braucht. Dieser Umstand soll zunächst im folgenden Paragraphen etwas näher erörtert werden.

§ 5.

Nehmen wir zuerst an, es liege als Funktion der complexen Variablen $z = x + iy$ ein Ausdruck vor; dann kann dieser wieder auf die Form einer complexen Gröfse, also auf die Form

$$w = u + iv$$

gebracht werden, worin u und v reelle Funktionen von x und y bedeuten. Allein nun ist nicht auch umgekehrt jeder Ausdruck von der letzteren Form zugleich eine Funktion von z; denn dazu ist erforderlich, dafs in $u + iv$ die reellen Variablen x und y so enthalten sind, dafs sie nur in der bestimmten Verbindung $x + iy$ darin vorkommen. Es leuchtet ein, dafs man leicht Funktionen von x und y bilden kann, in denen dies nicht der Fall ist, z. B. $x - iy$, $x^2 + y^2$, $2x + iy$. Dies sind wohl Funktionen von x und y, aber nicht von $x + iy$; es sind wohl complexe Funktionen,

aber nicht Funktionen einer complexen Variablen, Begriffe, die hiernach wohl unterschieden werden müssen. Demnach entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, welchen Bedingungen ein gegebener Ausdruck $w = u + iv$, worin u und v reelle Funktionen von x und y bedeuten, genügen mufs, damit derselbe eine Funktion von $z = x + iy$ sei. Um diese Bedingungen zu finden, differentiire man w partiell nach x und y; dann ist, wenn w zunächst Funktion von z sein soll,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial y},$$

oder da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

ist,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{dw}{dz}.$$

Daher erhält man als nothwendige Bedingung dafür, dafs w Funktion von z sei, die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Umgekehrt kann leicht gezeigt werden, dafs diese Bedingung auch hinreichend ist, dafs nämlich eine Funktion w von x und y, welche dieser Gleichung genügt, auch immer eine Funktion von z ist. Substituirt man in dem vollständigen Differential

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$$

den Werth $i\frac{\partial w}{\partial x}$ statt $\frac{\partial w}{\partial y}$, so erhält man

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + i\,dy)$$
$$= \frac{\partial w}{\partial x}dz.$$

Eliminirt man aber vor der Differentiation mit Hülfe der Gleichung $z = x + iy$ die Variable x aus der Funktion w, und unterscheidet die nach der Elimination gebildeten partiellen Differentialquotienten nach y und z von den vorigen durch Klammern, so ist

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz,$$

also, wenn man diesen Ausdruck für dw von dem vorigen subtrahirt,

$$0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) dz - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy.$$

Da nun aber dy und dz ganz von einander unabhängig sind, so mufs einzeln

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

sein. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dafs w nach der Elimination von x auch die Variable y nicht mehr enthält, sondern eine Funktion von z allein ist. Dann ist nun $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ mit $\frac{dw}{dz}$ gleichbedeutend, also giebt die zweite Gleichung das frühere Resultat $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$. Demnach ist die obige Beziehung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs w Funktion von $x + iy$ ist. Hieraus ergeben sich auch Bedingungsgleichungen für die beiden reellen Theile u und v. Substituirt man nämlich $u + iv$ für w, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

und dann durch Sonderung des Reellen vom Imaginären

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Endlich kann man auch für jede dieser Funktionen allein eine Bedingungsgleichung herstellen. Denn differentiirt man die vorigen Gleichungen noch einmal partiell nach x und y und eliminirt einmal v, das andere mal u, so erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

sodafs keine der beiden Funktionen u und v willkürlich ist, sondern jede der nämlichen partiellen Differentialgleichung genügen mufs. Diese partielle Differentialgleichung charakterisirt also die Bestandtheile u und v einer Funktion w von $x + iy$; die Funktion w selbst ist durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$$

charakterisirt.

§ 6.

Bleiben wir noch bei der Voraussetzung stehen, dafs die Funktion w durch einen Ausdruck gegeben sei, so lässt sich nun aus den Gleichungen (2) noch eine wichtige Folgerung ziehen. Einer Änderung dz von z entspricht die Änderung $\frac{dw}{dz}dz$ von w. Führt man dann in der derivirten Funktion $\frac{dw}{dz}$ die Gröfsen u, v und x, y ein, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)}{dx + i\,dy}.$$

Nun kann aber, wenn die Variable z durch einen Punkt in der xy-Ebene dargestellt wird, dieser Punkt seine Lage in jeder beliebigen Richtung ändern, und das Differential $dz = dx + i\,dy$ stellt die unendlich kleine gerade Linie, die die Ortsveränderung von z angiebt, nach Gröfse und Richtung dar. Diese unendlich kleine Gerade kann also von z aus nach jeder beliebigen Richtung gezogen werden. Nun zeigt aber der vorige Ausdruck, dafs $\frac{dw}{dz}$ von dz nicht unabhängig ist, sondern seinen Werth mit der Richtung von dz ändert. Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir in dem vorigen Ausdrucke das Differentialverhältniss $\frac{dy}{dx}$ einführen, welches eben die Richtung von dz angiebt. Durch Division mit dx im Zähler und Nenner erhält man dann

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}; \qquad (4)$$

woraus hervorgeht, dafs $\frac{dw}{dz}$ seinen Werth in der That mit dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ändert, wenn zwischen den vier Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ keine Beziehungen stattfinden. Berücksichtigt

man nun aber die Gleichungen (2) und eliminirt mit Hülfe derselben z. B. $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};$$

dann also wird $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von $\frac{dy}{dx}$ und daher auch von dz. Wenn also w eine Funktion der complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dz und hat für jede Richtung dieser unendlich kleinen Ortsveränderung denselben Werth. Nennt man die verschiedenen Wege, welche die Variable z bei ihrer Änderung einschlagen kann, die Arten der Veränderung, so kann man sagen, dafs die Derivirte von der Art, in welcher die Variable z sich verändert, unabhängig ist. Bei einer Funktion von einer reellen Variablen kommt die Veränderung der Variablen selbst nicht wesentlich in Betracht, weil diese Veränderung nur in einem Wachsen oder Abnehmen der Variablen bestehen kann. Bei Funktionen einer complexen Variablen dagegen spielt gerade die Verschiedenartigkeit, mit der die Variable sich verändern kann, eine grofse Rolle, und daher ist der gefundene Satz, dafs die Derivirte einer Funktion einer complexen Variablen von der Art der Veränderung der Variablen unabhängig ist, von grofser Wichtigkeit. Auch wird erst dadurch, dafs $\frac{dw}{dz}$ von dz vollständig, d. h. sowohl von der Länge als auch von der Richtung dieser unendlich kleinen Geraden unabhängig ist, der Begriff der derivirten Funktion in der Weise zu einem bestimmten, wie er es bei reellen Variablen ist.

Bis jetzt haben wir angenommen, dafs die Funktion w durch einen mathematischen Ausdruck von z gegeben sei. Lassen wir nun diese Voraussetzung fallen, so werden wir, damit auch die Derivirte der Funktion w einen bestimmten Sinn habe, noch die Forderung hinzufügen müssen, dafs dieselbe von dem Differential dz unabhängig sei. Die Erfüllung dieser Forderung ist dann aber wieder hinreichend, um w als Funktion von $x + iy$ zu charakterisiren; denn aus ihr folgen wieder unsere früheren Bedingungen

(1), (2) oder (3). Soll nämlich der Ausdruck (4) für $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dz, oder was dasselbe ist, von $\frac{dy}{dx}$ sein, so mufs die aus ihm folgende Gleichung

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + \left(i\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

für jeden Werth von $\frac{dy}{dx}$ erfüllt sein. Demnach erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$i\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

also, wie oben

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Nach allem diesen hat nun *Riemann**) eine Funktion einer complexen Gröfse folgendermafsen definirt: „Eine veränderliche complexe Gröfse w heifst eine Funktion einer anderen veränderlichen complexen Gröfse z, wenn sie sich mit ihr so ändert, dafs der Werth der Derivirten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials dz ist.“ Oder, wie es an einer andern Stelle**) ausgedrückt ist: „wenn w sich mit $x + iy$ der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}$ gemäfs ändert.“

Hiernach läfst sich nun auch leicht beweisen, dafs, wenn w eine Funktion von z ist, die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ es ebenfalls sein mufs. Denn aus den Gleichungen

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Gröfse, S. 2.

**) Allgemeine Voraussetzungen etc. Crelle's Journ. Bd. 54. S. 101.

also ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = i\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

und folglich genügt $\frac{dw}{dz}$ auch der Gleichung (1).

Ist ferner w Funktion von $z = x + iy$, und z Funktion von $\zeta = \xi + i\eta$, so ist w auch Funktion von ζ. Denn es ist, wie oben Seite 25,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + i\,dy) = \frac{\partial w}{\partial x}\,dz,$$

und ebenso

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}(d\xi + i\,d\eta),$$

also

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi}(d\xi + i\,d\eta);$$

die partiellen Differentialquotienten von w nach ξ und η sind daher

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

und folglich ist auch

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = i\,\frac{\partial w}{\partial \xi},$$

also w auch Funktion von $\xi + i\eta$.

§ 7.

Die soeben aufgestellte Bedingung besitzt eine bestimmte geometrische Bedeutung, welche noch erörtert werden soll.

Ist wie oben

$$z = x + iy \quad \text{und} \quad w = u + iv,$$

so sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes z in einer Ebene, und u und v die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes w in derselben oder in einer andern Ebene. Ist nun w eine Funktion von z, so wird die Lage des Punktes w von der Lage des Punktes z abhängig sein, und beschreibt z eine Curve, so wird w eine von der letzteren abhängige Curve beschreiben; kurz das ganze aus den Punkten w bestehende System wird in einer bestimmten Abhängigkeit von dem aus den Punkten z gebildeten Systeme stehen, wenn w eine bestimmte Funktion von z ist. *Riemann* nennt alsdann das System der Punkte w die Ab-

bildung des Systems der Punkte z. In Folge der obigen Bedingung stehen nun die beiden Figuren-Systeme in einer ganz bestimmten Beziehung, welche immer stattfindet, wenn w eine Funktion von z ist.

Es seien z' und z'' (Fig. 6) zwei unendlich nahe an einem dritten Punkte z gelegene Punkte, und man setze die nach verschiedenen Richtungen laufenden unendlich kleinen Verbindungslinien

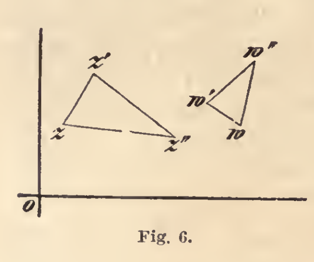


Fig. 6.

$$\overline{zz'} = dz', \quad \overline{zz''} = dz''.$$

Ferner seien w, w', w'' die den Punkten z, z', z'' entsprechenden Punkte, und die ebenfalls unendlich kleinen Verbindungslinien

$$\overline{ww'} = dw', \quad \overline{ww''} = dw''.*)$$

Soll nun $\frac{dw}{dz}$ für jede Richtung von dz denselben Werth haben, so muss

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{dw''}{dz''} \text{ oder } \frac{dw'}{dw''} = \frac{dz'}{dz''}$$

sein. Nun kann man aber die Differentiale durch die Differenzen der unendlich nahen Punkte ersetzen, also schreiben:

$$dz' = z' - z, \quad dw' = w' - w,$$
$$dz'' = z'' - z, \quad dw'' = w'' - w,$$

dann hat man

$$\frac{w' - w}{w'' - w} = \frac{z' - z}{z'' - z}$$

und folglich sind nach § 2 die Dreiecke $z'zz''$ und $w'ww'$ einander ähnlich, nämlich die Winkel $z'zz''$ und $w'ww''$ einander gleich und die sie einschliefsenden Seiten proportional. Da nun dies für jedes Paar entsprechender Punkte z und w stattfinden mufs, so ist die von dem Punkte w beschriebene Figur der von dem Punkte z beschriebenen in den unendlich kleinen Theilen ähnlich, und zwei sich schneidende Curven in der Ebene der w bilden mit einander denselben Winkel, wie die entsprechenden Curven in der Ebene der z. Dabei ist jedoch zu bemerken,

*) Man bemerke, dafs, wenn auch $\frac{dw}{dz}$ von dz unabhängig ist, doch dw, welches $= \frac{dw}{dz} dz$ ist, seine Richtung und Gröfse mit dz im Allgemeinen ändert.

dafs hierbei vorausgesetzt wird, dafs $\frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich sei. Wir werden später sehen, dafs in diesen Fällen eine Ausnahme eintritt*). *Siebeck* nennt die Abhängigkeit, in welcher das System der w zu dem der z steht, Verwandtschaft; und zwar wegen der Eigenschaft, dafs je zwei Paare von entsprechenden Curven unter sich gleiche Winkel einschliefsen, isogonale Verwandtschaft. Die einfachsten isogonalen Verwandtschaften sind die Ähnlichkeit und die von *Möbius* in die Geometrie eingeführte Kreisverwandtschaft. Bei der ersteren ist $w = az + b$, bei der letzteren $w = \frac{az + b}{cz + d}$, worin a, b, c, d Constanten bedeuten. Die Collineation aber, sowie auch die Affinität sind keine isogonalen Verwandtschaften; diese lassen sich nicht, wie die vorher genannten, durch eine Funktionsbeziehung zwischen zwei complexen Variabeln darstellen.

Als Beispiel diene die einfache Funktion

$$w = z^2.$$

Wir erhalten hier

$$w = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und daher

$$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

wodurch die Bedingungsgleichungen (2) verificirt sind. Läfst man nun z. B. z die y-Axe beschreiben, sodafs $x = 0$ ist, so hat man $z = iy$ und $w = -y^2$; daher beschreibt w den negativen Theil der Hauptaxe und zwar nur diesen, sodafs, wenn z von a über o nach b geht, w sich von a' nach o und dann wieder zurück nach b' bewegt, wo a' und b' zusammenfallen, wenn $\overline{ao} = \overline{ob}$ angenommen wird (Fig. 8). Läfst man ferner z einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r beschreiben, sodafs, wenn man $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt, r constant bleibt, so ist $w = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$, also beschreibt auch w einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r^2. Da aber dem Winkel φ von z der Winkel 2φ von w entspricht, so durchläuft w seinen Kreis doppelt so rasch als z. Beschreibt z. B. z von a aus einen Halbkreis in

*) Vgl. § 40.

der Richtung der wachsenden Winkel nach b, so beschreibt w einen ganzen Kreis von a' nach dem mit a' zusammenfallenden Punkte b'. Der Winkel aber, den die Gerade und der Kreis in z und in w mit einander bilden, ist bei beiden ein Rechter. Läfst man z eine durch den Punkt 1 gehende mit der y-Axe parallele Gerade cd beschreiben, so beschreibt w eine Parabel. Dies ergiebt sich einfach so, dafs man, weil in diesem Falle x constant $= 1$ ist, in den Gleichungen $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $x = 1$ setzt und y eliminirt; dadurch erhält man zwischen den Coordinaten u und v des Punktes w die Gleichung $v^2 = 4(1 - u)$, welche zeigt, dafs w eine Parabel beschreibt, welche ihren Scheitel in 1, ihren Brennpunkt in o hat, und für welche der Parameter, die Ordinate

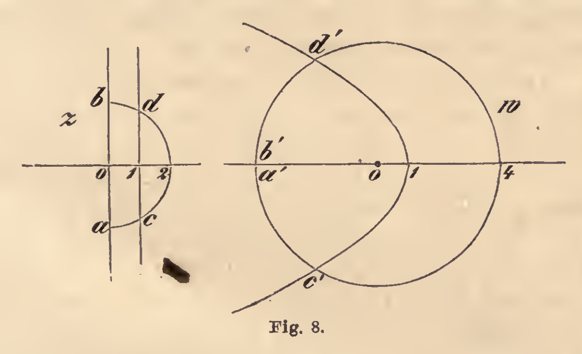


Fig. 8.

im Brennpunkte, $= 2$ ist. Durch Untersuchung der Tangenten in den Durchschnittspunkten c' und d', welche c und d entsprechen, liefse sich wieder leicht verificiren, dafs die Parabel den Kreis in w unter denselben Winkeln schneidet, wie die Gerade cd den Kreis in z. Um endlich auch einen der Ausnahmefälle durch ein Beispiel zu erläutern, beschreibe noch z die Hauptaxe; dann bleibt z reell, also w positiv, und folglich beschreibt w den positiven Theil der Hauptaxe. Dieser aber bildet mit dem negativen Theile, welcher der y-Axe in z entsprach, einen Winkel von 180^0, während die x- und y-Axe in z einen Winkel von 90^0 mit einander bilden. In der Nähe des Nullpunktes findet also nicht Ähnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt, und in der That erhält in diesem Punkte die Derivirte $\frac{dw}{dz} = 2z$ den Werth Null.

Dritter Abschnitt.

Mehrdeutige Funktionen.

§ 8.

Die Einführung complexer Variablen wirft auch ein helles Licht auf die Natur der mehrdeutigen Funktionen. Da nämlich eine complexe Variable beim Übergange von einem Anfangspunkte z_0 zu einem andern Punkte z_1 sehr verschiedene Wege einschlagen kann, so liegt es nahe, sich die Frage zu stellen, ob nicht der durchlaufene Weg von Einfluſs sein kann auf den Werth w_1, den eine Funktion, die mit einem bestimmten Werthe w_0 aus z_0 ausgeht, im Endpunkte z_1 erlangt; sich zu fragen, ob die von w beschriebenen, von w_0 ausgehenden Curven, welche den zwischen z_0 und z_1 beschriebenen entsprechen, immer in demselben Punkte w_1 endigen müssen, oder ob sie auch in verschiedenen Punkten endigen können. Nun ist zuerst klar, daſs bei eindeutigen Funktionen der Endwerth w_1 von dem Wege unabhängig sein muſs, denn sonst müſste die Funktion für einen und denselben Werth von z mehrere Werthe annehmen können, was bei einer eindeutigen Funktion nicht der Fall ist. Allein bei den mehrdeutigen Funktionen fällt dieser Grund fort. Bei einer solchen hat in der That die Funktion für denselben Werth von z mehrere Werthe, und daher ist von vornherein die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daſs verschiedene Wege auch zu verschiedenen Punkten oder Funktionswerthen führen können. Läſst man z. B. in $w = \sqrt{z}$ die Variable z von 1 nach 4 auf verschiedenen Wegen gehen, und geht man mit der Funktion w für $z = 1$ mit $w = +1$ aus, so liegt die Möglichkeit vor, daſs einige Wege von $w = +1$ nach $w = +2$, andere dagegen von $w = +1$ nach $w = -2$ führen können*).

Es sind nun hier vor allen Dingen solche Punkte ins Auge zu fassen, in welchen zwei oder mehrere Werthe der Funktion w, die im Allgemeinen verschieden sind, einander gleich werden. Ein solcher ist z. B. für $w = \sqrt{z}$ der Punkt $z = 0$, in diesem werden die im Allgemeinen mit verschiedenen Vorzeichen behafteten

*) Wir haben bei diesen Betrachtungen die (nicht rationalen) algebraischen Funktionen im Auge und setzen daher stets voraus, daſs die Anzahl der Werthe, welche die Funktion für den nämlichen Werth der Variablen z annehmen kann, eine endliche ist.

Werthe von w einander gleich, nämlich beide $= 0$. Betrachten wir ferner die durch die kubische Gleichung

$$w^3 - w + z = 0$$

definirte Funktion, so liefert hier die Cardanische Formel, wenn der Kürze wegen

$$p = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-z - \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)}, \quad q = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-z + \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)},$$

und die beiden imaginären Kubikwurzeln der Einheit

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \alpha, \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \alpha^2$$

gesetzt werden, folgende Ausdrücke für die drei Wurzeln der obigen Gleichung, welche mit w_1, w_2, w_3 bezeichnet werden mögen:

$$\begin{aligned} w_1 &= p + q \\ w_2 &= \alpha p + \alpha^2 q \\ w_3 &= \alpha^2 p + \alpha q. \end{aligned}$$

Für jeden Werth von z hat hier im Allgemeinen w die drei Werthe w_1, w_2, w_3. Von diesen werden aber die beiden letzten einander gleich, wenn $p = q$ ist, was eintritt, wenn

$$z = \frac{2}{\sqrt{27}}$$

ist. In diesem Punkte wird

$$w_2 = w_3 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Nehmen wir nun an, indem wir an dieses Beispiel die ferneren Betrachtungen anknüpfen, die Variable z verändere sich stetig, oder der sie darstellende Punkt beschreibe eine Linie, so werden die drei Gröfsen w_1, w_2, w_3 sich ebenfalls, jede für sich, stetig ändern, oder die drei entsprechenden Punkte werden drei abgesondert verlaufende Linien beschreiben. Wenn aber z durch den Punkt $z = \frac{2}{\sqrt{27}}$ hindurchgeht, so nehmen beide Gröfsen w_2 und w_3 den Werth $\sqrt{\frac{1}{3}}$ an; die beiden von w_2 und w_3 beschriebenen Linien werden daher in dem Punkte $\sqrt{\frac{1}{3}}$ zusammentreffen. Beim Überschreiten dieses Punktes kann demnach ohne Unterbrechung der Stetigkeit w_2 in w_3, und w_3 in w_2 übergehen, ja es bleibt vollständig willkürlich, auf welcher der beiden Linien man jede der beiden Gröfsen w_2 und w_3 ihren Weg fortsetzen lassen will. Es findet an dieser Stelle gleichsam eine Verzweigung der Linien

statt, welche von den Gröfsen w_2 und w_3 beschrieben werden; daher hat *Riemann* die Punkte der z-Ebene, bei welchen ein Funktionswerth in einen anderen übergehen kann, Verzweigungspunkte genannt. In unserem Beispiele ist hiernach der Punkt $z = \frac{2}{\sqrt{27}}$ ein Verzweigungspunkt (nicht etwa $w = \sqrt{\frac{1}{3}}$). Zur Erläuterung ist Fig. A und B beigefügt worden. In Fig. A sind

Fig. A.

die drei Linien w_1, w_2, w_3 für den Fall gezeichnet, dafs z eine der y-Axe parallele Gerade beschreibt, welche durch den Verzweigungspunkt $e = \frac{2}{\sqrt{27}}$ (Fig. B) hindurchgeht. Dabei ist aber die Linie w_1 der Deutlichkeit wegen

Fig. B.

in doppelt so grofsem Maafsstabe, als die übrigen Linien, dargestellt und, um Raum zu sparen, näher an die Ordinatenaxe herangerückt, als sie eigentlich verläuft. Die Punkte w, welche den Punkten z entsprechen, sind mit den nämlichen Buchstaben und hinzugefügten Indices 1, 2, 3 bezeichnet. Das Bild der Verzweigung tritt nun noch deutlicher hervor, wenn man nur eine der Gröfsen, z. B. w_3, verfolgt. Diese beschreibt die Linie $b_3\, c_3\, d_3$, welche sich dem Punkte $e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ nähert, wenn z auf der Linie bcd an den Punkt $e = \frac{2}{\sqrt{27}}$ heran geht; überschreitet nun z diesen Punkt, so gehen für w_3 zwei Wege von $e_2 = e_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

aus, nämlich $e_3 f_3 g_3 h_3$ und $e_2 f_2 g_2 h_2$, von denen der eine eben so gut wie der andere als der Fortsetzung $efgh$ von z entsprechend angesehen werden kann; es theilt sich der dem w_3 freistehende Weg bei $e_2 = e_3$ wirklich in zwei Zweige. Wenn nun z von b nach h durch den Verzweigungspunkt e geht, so kann w_3 von b_3 ebensowohl nach h_3 wie nach h_2 gelangen, und ebenso w_2 von b_2 aus; bei einem solchen durch den Verzweigungspunkt hindurchführenden Wege bleibt also der Endwerth der Funktion unbestimmt. Wenn dagegen z von b nach h einen Weg beschreibt, der nicht durch einen Verzweigungspunkt hindurch führt, so kann zwar je nach der Beschaffenheit dieses Weges der Endwerth der Funktion ein verschiedener sein, er ist aber für jeden bestimmten Weg des z immer ein ganz bestimmter. Auch dies erläutern die Figuren A und B. Geht nämlich z von b über d, und dann längs der gestrichelten Linie über m nach f und h, so geht w_3 von b_3 über d_3 und dann längs der ebenso bezeichneten Linie über m_3 nach f_3 und h_3; w_2 von b_2 über d_2, m_2, f_2 nach h_2; w_3 erlangt dann den bestimmten Werth h_3, und w_2 den bestimmten Werth h_2. Diese Endwerthe werden andere, aber wiederum bestimmte, wenn z den Verzweigungspunkt e auf der anderen Seite längs der punktirten Linie über p umgeht. In diesem Falle geht w_3 von b_3 über d_3 und dann längs der punktirten Linie über p_3 nach f_2 und h_2; und w_2 geht über d_2, p_2, f_3 nach h_3. In diesem Falle sind zwar die Fortschreitungen der Funktionen und daher auch ihre Endwerthe andere als vorhin, aber wiederum ganz bestimmte.

Im Allgemeinen sind nun solche Punkte der z-Ebene, in welchen mehrere sonst verschiedene Werthe einer Funktion einander gleich werden, in der Regel auch Verzweigungspunkte der Funktion. Von einer Ausnahme hievon soll sogleich die Rede sein.

Eine ähnliche Verzweigung der Funktion findet für solche Punkte statt, in denen w unendlich grofs wird und dadurch eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Dies ist z. B. bei der durch die Gleichung

$$(z-b)\,(w-c)^3 = z-a \text{ oder } w = c + \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}$$

bestimmten Funktion der Fall, in welcher a, b, c drei complexe Constanten, also drei feste Punkte bedeuten. Hier ist $z = a$ ein Verzweigungspunkt, in welchem drei Werthe der Funktion in dem einen $w = c$ zusammenfallen. Aufserdem aber werden für $z = b$

alle drei Werthe von w unendlich grofs. Hier erleiden die drei Funktionen eine Unterbrechung der Stetigkeit, und daher kann es wieder unentschieden bleiben, auf welchem Wege jede fortzusetzen ist, weil, wenn die Funktion einen Sprung macht, sie ebensowohl nach der einen, wie nach einer anderen Fortsetzung ihres Weges überspringen kann. Daher ist $z = b$ ebenfalls ein Verzweigungspunkt. Auch im Allgemeinen sind diejenigen Punkte, in denen w unendlich grofs oder unstetig ist, in der Regel Verzweigungspunkte.

Es kann hievon aber auch Ausnahmen geben: es giebt Fälle, bei welchen Punkte, in denen Funktionswerthe einander gleich oder unendlich grofs werden, doch keine Verzweigungspunkte sind. Dies kann für jetzt nur erst an einem Beispiele erläutert werden. In den Funktionen

$$\sqrt{1 - z^2} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

sind $z = +1$ und $z = -1$ Verzweigungspunkte; dagegen in

$$(z - a)\sqrt{z} \text{ und } \frac{1}{(z - a)\sqrt{z}}$$

ist $z = a$ kein Verzweigungspunkt, obgleich die Funktionswerthe an dieser Stelle im ersten Falle beide gleich Null und im zweiten beide unendlich grofs sind. Wenn nämlich z den Punkt a überschreitet, so hat sowohl $z - a$ als auch $\sqrt{z}$ eine ganz bestimmte stetige Fortschreitung: $z - a$, weil es überhaupt eindeutig ist, und $\sqrt{z}$, weil $+\sqrt{a}$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit nicht plötzlich nach $-\sqrt{a}$ überspringen kann. Daher haben auch die aus diesen Gröfsen auf rationale Weise zusammengesetzten Funktionen an dieser Stelle für jede von z beschriebene Linie eine bestimmte Fortschreitung, und es findet keine Verzweigung statt. Die Verzweigungspunkte sind demnach zwar nur unter denjenigen Punkten zu suchen, in welchen entweder eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt, oder mehrere Funktionswerthe zusammenfallen; aber ob solche Punkte wirklich Verzweigungspunkte sind, mufs noch besonders entschieden werden.

§ 9.

Die vorigen Betrachtungen haben gezeigt, dafs, wenn die Variable z von einem beliebigen Punkte z_0 ausgehend nach einem andern Punkte z_1 hin einen Weg beschreibt, welcher durch einen Ver-

zweigungspunkt einer Funktion w hindurchführt, dieselbe in z_1 verschiedene Werthe erhält, je nachdem man sie auf dem einen oder dem andern ihrer Zweige weiter gehen läfst. Bei einem solchen Wege des z ist also der Werth des w in z_1 unbestimmt. Auf jedem andern Wege dagegen, der nicht durch einen Verzweigungspunkt hindurch führt, erhält w in z_1 einen bestimmten Werth, und wir wollen nun zeigen, dafs zwei Wege, die beide von z_0 nach z_1 führen, dem w in z_1 nur dann verschiedene Werthe zuertheilen, wenn sie einen Verzweigungspunkt einschliefsen. Dazu beweisen wir zuerst folgenden Satz:

Läfst man die Variable z zwei unendlich nahe liegende Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ (Fig. 9) von z_0 nach z_1 beschreiben, welche an keiner Stelle einem Punkte unendlich nahe kommen, in dem entweder die Funktion w unstetig wird, oder in welchem mehrere Funktionswerthe zusammenfallen, so erhält die Funktion w, wenn sie aus z_0 mit dem nämlichen Werthe ausgeht, auf beiden Wegen in z_1 den nämlichen Werth.

Um diesen Satz zu beweisen, bemerke man zuerst, dafs die verschiedenen Werthe, welche eine mehrdeutige Funktion in einem und demselben Punkte z hat, nur dann um eine unendlich kleine Gröfse von einander verschieden sein können, wenn der Punkt z einem solchen Punkte unendlich nahe liegt, in dem mehrere Funktionswerthe zusammenfallen. (Vgl. Fig. A und B, S. 36. In diesem Beispiele nähern sich die von den Funktionswerthen beschriebenen Linien nur für den Punkt c, während sie für alle anderen Punkte z in endlichen Entfernungen von einander verlaufen.) Da nun die beiden Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ der Voraussetzung gemäfs sich nirgend einem solchen Punkte nähern, so sind die verschiedenen Werthe, die w in irgend einem Punkte der beiden Wege haben kann, um endliche Gröfsen von einander verschieden. Folglich können auch die Werthe, welche die Funktion w auf den beiden Wegen $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ in z_1 erlangt, nur entweder einander gleich oder um eine endliche Gröfse von einander verschieden sein. Nun kann aber die letztere Alternative nicht statt haben. Denkt man sich nämlich, dafs zwei bewegliche Punkte z die beiden unendlich nahen Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ in der Art durchlaufen, dafs sie stets einander unendlich nahe bleiben, und bezeichnet man die Funktionswerthe auf der

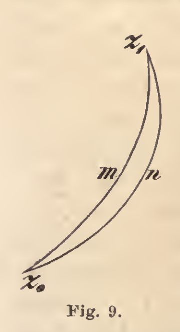


Fig. 9.

einen Linie mit w_m und auf der anderen mit w_n, so können w_m und w_n längs beider Linien nur um eine unendlich kleine Gröfse von einander verschieden sein, da der Voraussetzung nach w bei beiden Wegen aus z_0 mit dem nämlichen Werthe ausgeht, und auf beiden sich stetig ändert, und weil auch beim Übergange von einem Punkte der einen Linie zu einem unendlich nahen Punkte der anderen Linie Stetigkeit stattfindet. Wenn nun w_m und w_n in z_1 um eine endliche Gröfse verschieden wären, so müfste mindestens eine dieser Funktionen an irgend einer Stelle einen Sprung machen, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen wird, dafs die beiden Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ sich keinem Punkte nähern sollen, in welchem eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt. Demnach können w_m und w_n in z_1 nicht um eine endliche Gröfse von einander verschieden sein, und daher sind sie nach dem Obigen einander gleich.

Denkt man sich nun, nachdem dies festgestellt ist, eine Reihe auf einander folgender und unendlich nahe an einander liegender Wege, alle zwischen den Punkten z_0 und z_1, und so beschaffen, dafs keiner derselben sich einem Punkte nähert, in dem entweder Unstetigkeit eintritt, oder Funktionswerthe zusammenfallen, so erhält die Funktion auf allen diesen Wegen den nämlichen Werth in z_1. Daraus folgt dann: Wenn man einen Weg zwischen zwei Punkten z_0 und z_1 so durch allmälige Übergänge in einen andern Weg umformen kann, dafs dabei keiner der soeben charakterisirten kritischen Punkte überschritten wird, so erhält die Funktion in z_1 auf dem zweiten Wege denselben Werth wie auf dem ersten. Diese Schlufsfolgerung bleibt auch dann noch gültig, wenn die beiden Punkte z_0 und z_1 zusammenfallen, wenn die Variable also eine geschlossene Linie beschreibt. Die obige Bedingung verwandelt sich in diesem Falle in die, dafs die geschlossene Linie keinen der erwähnten kritischen Punkte einschliefsen darf. Läfst man daher die Variable z von z_0 ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben und wieder nach z_0 zurückkehren, so erhält die Funktion, wenn die Variable die geschlossene Linie durchlaufen hat und zum zweiten Male nach z_0 kommt, hier denselben Werth, den sie beim Ausgange hatte, wenn die geschlossene Linie keinen Punkt umgiebt, in welchem entweder Unstetigkeit eintritt oder Funktionswerthe zusammenfallen.

Solche geschlossene Linien, die von der Variablen z beschrieben werden, sind nun maafsgebend für die Untersuchung des Einflusses, den der Weg, auf welchem die Variable z nach irgend

einem Punkte hingeht, auf den Werth ausübt, welchen die Funktion w in diesem Punkte erlangt. Umgiebt eine geschlossene Linie keinen der schon so oft erwähnten Punkte, so ändert, wie gezeigt worden ist, die Funktion ihren Werth nicht; umgiebt sie aber einen solchen Punkt, so kann die Funktion ihren Werth ändern, oder auch nicht ändern. Werden ferner von der Variablen zwischen zwei Punkten zwei Wege durchlaufen, die keinen derartigen Punkt einschliefsen, so führen diese zu gleichen Funktionswerthen. Wir haben daher nur Wege zu betrachten, die einen solchen Punkt einschliefsen. Sei nun a (Fig. 10) ein Punkt von dieser Art, und nehmen wir zwei Wege bdc und bec an, welche a, aber keinen anderen ähnlichen Punkt einschliefsen. Aus b gehe w mit dem Werthe w_0 aus und erlange auf dem Wege bdc in c den Werth W. Läfst man dann aber die Variable z, ehe sie den anderen Weg bec betritt, zuvor eine den Punkt a umgebende geschlossene Linie $bghb$ durchlaufen, so kann der Weg $bghbec$ in bdc umgeformt werden, ohne dafs der Punkt a überschritten wird, folglich erlangt w auf diesem Wege in c ebenfalls den Werth W, wenn es aus b mit dem Werthe w_0 ausgeht. Wir haben also Folgendes:

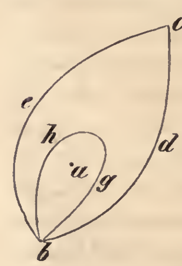


Fig. 10.

auf bdc geht w von w_0 nach W

„ $bghbec$ „ w „ w_0 „ W.

Nehmen wir nun zuerst an, w ändere seinen Werth beim Durchlaufen der geschlossenen Linie $bghb$ und gehe in w_1 über, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht w von w_0 nach w_1

und daher

auf bec „ w „ w_1 „ W.

Demnach erlangt w auf bec in c den Werth W dann, wenn es aus b mit dem Werthe w_1 ausgeht; läfst man es also aus b mit dem Werthe w_0 ausgehen, so kann es den Werth W nicht erlangen, sondern mufs zu einem andern Werthe geführt werden. Wenn dagegen w auf der geschlossenen Linie $bghb$ seinen Werth nicht ändert, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht w von w_0 nach w_0

„ bec „ w „ w_0 „ W;

dann erlangt also w, aus b mit dem Werthe w_0 ausgehend, auch auf dem Wege bec den Werth W.

Hieraus folgt nun: wenn zwei Wege einen unserer in Rede

stehenden Punkte a einschliefsen, so führen sie zu verschiedenen oder gleichen Funktionswerthen, je nachdem die Funktion w beim Durchlaufen einer den Punkt a umgebenden geschlossenen Linie ihren Werth ändert oder nicht ändert.

Jetzt sind wir im Stande, die Verzweigungspunkte näher festzustellen. Es soll nämlich ein Punkt a, in welchem entweder eine Unstetigkeit eintritt oder mehrere Funktionswerthe zusammenfallen, dann und nur dann ein Verzweigungspunkt genannt werden, wenn die Funktion beim Umlaufe auf einer diesen Punkt (und keinen anderen ähnlichen) umgebenden geschlossenen Linie ihren Werth ändert. Hiebei ist jedoch zu bemerken, dafs es nicht nothwendig ist, dafs alle Funktionswerthe gleichzeitig ihre Werthe ändern. Damit der betrachtete Punkt ein Verzweigungspunkt sei, ist nur erforderlich, dafs dies bei irgend einem der in Betracht kommenden Funktionswerthe eintritt. Es kann nämlich der Fall vorkommen, dafs bei dem Umlaufe um einen Verzweigungspunkt nur einige Funktionswerthe sich ändern, während andere ungeändert bleiben. Das S. 36 ff. betrachtete Beispiel bietet einen solchen Fall dar. Läfst man die Variable z in Fig. B die geschlossene Linie $dpfmd$ durchlaufen, welche den Verzweigungspunkt $e = \frac{2}{\sqrt{27}}$ umgiebt, so ersieht man aus Fig. A, dafs dann w_2 in w_3, und w_3 in w_2 übergeht, dafs aber w_1 seinen Werth nicht ändert, sondern ebenfalls eine geschlossene Linie beschreibt. Hiemit ist denn der im Eingange dieses Paragraphen ausgesprochene Satz dargethan, dafs zwei verschiedene, dieselben Punkte verbindende Wege nur dann einer Funktion, die vom Ausgangspunkte mit demselben Werthe ausgeht, verschiedene Werthe zuertheilen, wenn sie einen Verzweigungspunkt einschliefsen; und für geschlossene Linien können wir den Satz aussprechen: Eine mehrdeutige Funktion kann von einem in einem Punkte z_0 stattfindenden Werthe zu einem andern in demselben Punkte stattfindenden Werthe dadurch auf stetige Weise übergehen, dafs die Variable z von z_0 aus eine geschlossene Linie beschreibt, welche einen Verzweigungspunkt umgiebt.

Geschlossene Linien, welche zwei oder mehrere Verzweigungspunkte umgeben, können ebenfalls auf solche geschlossene Linien zurückgeführt werden, welche nur einen Verzweigungspunkt enthalten. Denn zieht man von einem Punkte z_0 aus um jeden Verzweigungspunkt eine geschlossene Linie und läfst die Variable dieselben eine nach der andern durchlaufen, so kann dieser Weg,

ohne dafs einer der Verzweigungspunkte überschritten wird, in eine geschlossene Linie umgeformt werden, die von z_0 aus alle Verzweigungspunkte umgiebt. (Fig. 11, wo a und b zwei Verzweigungspunkte bedeuten.) Man stellt solche geschlossene Linien um die einzelnen Verzweigungspunkte am einfachsten dadurch her, dafs man um jeden einen kleinen Kreis beschreibt und jeden dieser Kreise mit z_0 durch eine Linie verbindet, die dann doppelt, hin und wieder zurück, durchlaufen werden mufs.

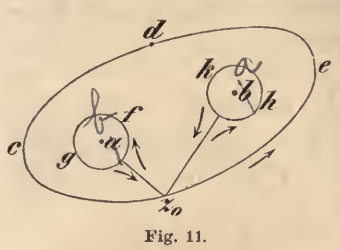


Fig. 11.

§ 10.

Es sollen nun die vorigen Betrachtungen an einigen Beispielen erläutert, und daran zugleich gezeigt werden, in welcher Weise die Funktionswerthe beim Durchlaufen geschlossener, einen Verzweigungspunkt umgebender Linien in einander übergehen.

Erstes Beispiel.

$$w = \sqrt{z}.$$

Hier ist $z = 0$ ein Verzweigungspunkt. Läfst man die Veränderliche von dem Punkte $z = 1$ ausgehen und die Peripherie eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises durchlaufen, so ist dies eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungspunkt umgiebt. Geht nun die Funktion $w = \sqrt{z}$ von dem Punkte $z = 1$ mit dem Werthe $w = +1$ aus, und setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so ist zuerst im Punkte $z = 1$, $r = 1$ und $\varphi = 0$. Durchläuft dann z die Peripherie des Kreises in der Richtung der wachsenden Winkel, so bleibt r constant $= 1$, und φ nimmt von 0 bis 2π zu. Kommt also die Veränderliche wieder nach dem Punkte $z = 1$ zurück, so ist jetzt

$$z = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

und folglich

$$w = \sqrt{z} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

die Funktion hat also jetzt im Punkte $z = 1$ nicht wieder den ursprünglichen Werth $+1$, sondern den anderen Werth -1 erhalten. Ganz dasselbe tritt auch ein, wenn die Variable irgend eine andere geschlossene, den Nullpunkt einmal umgebende Linie von $z = 1$ aus beschreibt; denn dieser Weg kann durch allmälige

Änderungen in den Kreis übergeführt werden, ohne dafs dabei der Nullpunkt überschritten wird. Geht überhaupt w mit dem Werthe w_0 von irgend einem Punkte z_0 aus, für welchen

$$z_0 = r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0),$$

also

$$w_0 = r_0^{\frac{1}{2}} (\cos \tfrac{1}{2}\varphi_0 + i \sin \tfrac{1}{2}\varphi_0)$$

ist, und beschreibt z eine geschlossene Linie, welche den Nullpunkt einmal in der Richtung der wachsenden Winkel umwindet, so ist bei der Rückkunft noch z_0

$$z = r_0 [\cos (\varphi_0 + 2\pi) + i \sin (\varphi_0 + 2\pi)]$$

geworden; mithin ist dann

$$w = r_0^{\frac{1}{2}} [\cos (\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \pi) + i \sin (\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \pi)]$$
$$= - w_0.$$

Wird die geschlossene Linie zweimal von der Variablen durchlaufen, oder beschreibt letztere eine andere geschlossene Linie, welche den Nullpunkt zweimal umwindet, so wächst das Argument von z um 4π, also das von w um 2π, und folglich erhält dann die Funktion ihren ursprünglichen Werth wieder.

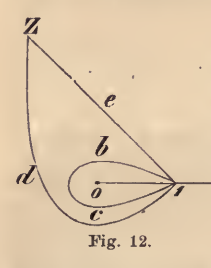


Fig. 12.

Man lasse nun die Variable von dem Punkte $z = 1$ nach einem beliebigen Punkte Z gehen, und zwar zuerst auf einer Linie $1eZ$ (Fig. 12), welche den Nullpunkt nicht umwindet, und auf welcher die Winkel φ wachsen. Auf diesem Wege mögen r und φ in Z die Werthe R und ϑ, und w den Werth W erreichen, sodafs

$$W = R^{\frac{1}{2}} (\cos \tfrac{1}{2}\vartheta + i \sin \tfrac{1}{2}\vartheta)$$

ist. Geht man dann aber auf der anderen Seite des Nullpunktes von 1 nach Z auf einer den Nullpunkt nicht umwindenden Linie $1dZ$, so nimmt der Winkel φ ab und erreicht in Z den Werth $\vartheta - 2\pi$. Daher wird jetzt in Z

$$z = R [\cos (2\pi - \vartheta) - i \sin (2\pi - \vartheta)]$$

und

$$w = R^{\frac{1}{2}} [\cos (\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta) - i \sin (\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta)]$$

d. h.

$$w = - W.$$

Läfst man endlich z zuerst von 1 aus eine geschlossene Linie $1bc1$ um den Nullpunkt und dann die Linie $1dZ$ beschreiben, so wächst φ zuerst von 0 bis 2π und nimmt dann um den Winkel $2\pi - \vartheta$ ab, sodafs dann φ in Z den Werth $2\pi + \vartheta - 2\pi = \vartheta$

erhält; in diesem Falle geht also w nach dem Durchlaufen der Linie $1bc1$ von 1 mit dem Werthe -1 aus und erlangt auf $1dZ$ in Z den Werth $+W$.

Zweites Beispiel. In der Funktion

$$w = (z-1)\sqrt{z}$$

ist zuerst $z = 0$ ein Verzweigungspunkt, und es verhält sich diese Funktion in Beziehung auf diesen Punkt ähnlich wie die vorige. Betrachten wir daher den Punkt $z = 1$, für welchen ebenfalls $w = 0$ wird. Die Variable z beschreibe um ihn einen Kreis mit dem Radius r, von dem Punkte $a = 1 + r$ der Hauptaxe (Fig. 13) ausgehend. Setzt man

$$z - 1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

so wird

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\sqrt{1 + r\cos\varphi + ir\sin\varphi}.$$

Da nun r constant bleibt, und φ von 0 bis 2π wächst, so ändert der Factor $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ seinen Werth nicht. Um das Verhalten des zweiten Factors zu untersuchen, sei

$$1 + r\cos\varphi = \varrho\cos\psi, \qquad r\sin\varphi = \varrho\sin\psi;$$

dann bedeutet ϱ die Gerade $\overline{oz}$, und ψ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe, und es wird

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\psi + i\sin\tfrac{1}{2}\psi).$$

Umgiebt nun der Kreis den Nullpunkt nicht, so durchläuft ψ von 0 an eine Reihe von Werthen, welche wieder mit dem Werthe 0 endigen, daher ändert w seinen Werth nicht. Ist aber der Kreis so grofs, dafs der Nullpunkt, welcher ein Verzweigungspunkt ist, ebenfalls innerhalb desselben liegt, so wächst ψ von 0 bis 2π, und dann geht also der ursprüngliche Werth $w = r\varrho^{\frac{1}{2}}$ in $-r\varrho^{\frac{1}{2}}$ über. Es bestätigt sich also, dafs nur der Punkt $z = 0$ ein Verzweigungspunkt ist, der Punkt $z = 1$ aber nicht.

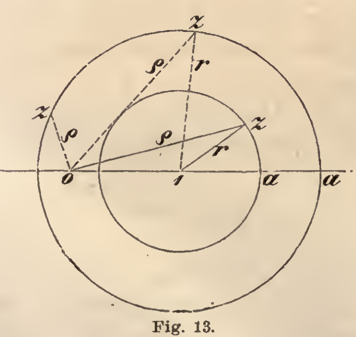


Fig. 13.

Man kann die gegebene Funktion $(z-1)\sqrt{z}$ als aus der folgenden

$$w' = \sqrt{(z-1)(z-b)z}$$

entstanden betrachten dadurch, dafs b gleich 1 geworden ist. Eine den Punkt $z = 1$ umgebende Linie kann dann betrachtet werden als eine Linie, welche die beiden

Punkte $z = 1$ und $z = b$ zugleich umgab, und bei welcher dann diese beiden Punkte zusammengefallen sind. Nun sind für die Funktion w' sowohl $z = 0$, als auch $z = 1$ und $z = b$ Verzweigungspunkte. Eine geschlossene Linie, welche von einem Punkte z_0 aus beide Punkte 1 und b umgiebt, kann ersetzt werden durch zwei geschlossene Linien, von denen jede nur einen derselben umgiebt. Geht nun w' mit dem Werthe w_0' aus z_0 aus, so geht beim Umkreisen des Punktes b, w_0' in $-w_0'$, und dann beim Umkreisen des Punktes 1 wieder $-w_0'$ in w_0' über. Die Funktion kommt also mit dem ursprünglichen Werthe nach z_0 zurück. Dies bleibt nun bestehen, wenn b sich dem Punkte 1 nähert, und wir sehen, dafs, wenn diese Verzweigungspunkte auf einander fallen, der gemeinschaftliche Punkt aufhört, ein Verzweigungspunkt zu sein. Es leuchtet ein, dafs dies allgemein gelten mufs: sobald bei zwei Verzweigungspunkten nur zwei und zwar die nämlichen zwei Funktionswerthe gegenseitig in einander übergehen, so heben diese Verzweigungspunkte beim Zusammenfallen einander auf, und es entsteht ein Punkt, der kein Verzweigungspunkt mehr ist.

Drittes Beispiel. Sei

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}},$$

worin a und b zwei complexe Constanten bedeuten. Hier haben wir zwei Verzweigungspunkte $z = a$ und $z = b$. Läfst man nun zuerst z eine geschlossene Linie von einem beliebigen Punkte z_0 aus um den Punkt a beschreibsn, welche aber b nicht umgiebt, und setzt zu dem Ende

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

während

$$z_0 - a = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$$

sei, so ist der Anfangswerth von w, der hier mit w_1 bezeichnet werden möge,

$$w_1 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{1}{3}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{3}\varphi_0)}{[a - b + r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Nachdem die geschlossene Linie einmal in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen ist, ist φ_0 um 2π gewachsen, und daher der entstehende Werth von w, welcher mit w_2 bezeichnet werden soll,

$$w_2 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}}[\cos(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi)]}{[a - b + r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}$$

geworden. Dabei kann der Nenner, also die Gröfse $\sqrt[3]{z-b}$ ihren Werth nicht geändert haben, weil für diese $z = a$ kein Verzweigungspunkt ist, sondern nur $z = b$, also z eine geschlossene Linie beschrieben hat, die den Verzweigungspunkt dieser Gröfse nicht umgiebt. Bezeichnet man mit α den Werth

$$\alpha = \cos\tfrac{2}{3}\pi + i\sin\tfrac{2}{3}\pi = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

sodafs α eine Wurzel der Gleichung $\alpha^3 = 1$ ist, so kann man auch schreiben, da

$$\cos(\tfrac{1}{3}\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi) + i\sin(\tfrac{1}{3}\varphi_0 + \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$= (\cos\tfrac{1}{3}\varphi_0 + i\sin\tfrac{1}{3}\varphi_0)(\cos\tfrac{2}{3}\pi + i\sin\tfrac{2}{3}\pi) \text{ ist,}$$
$$w_2 = \alpha w_1.$$

Läfst man nun die Variable aufs Neue eine geschlossene Linie um den Punkt a herum beschreiben, so geht jetzt w mit dem Werthe $w_2 = \alpha w_1$ von z_0 aus und erlangt folglich nach Vollendung des Umlaufs den Werth

$$w_3 = \alpha w_2 = \alpha^2 w_1.$$

Nach einem dritten Umlaufe endlich erlangt w den Werth $\alpha^3 w_1$, erhält also den ursprünglichen Werth w_1 wieder, da $\alpha^3 = 1$ ist. Wäre man, statt ursprünglich mit dem Werthe w_1 von z_0 auszugehen, zuerst mit dem Werthe w_2 ausgegangen, so hätte man nach resp. ein und zwei Umläufen die Werthe w_3 und w_1 erhalten; wäre aber w_3 der ursprüngliche Werth gewesen, so würde dieser in w_1 und w_2 übergegangen sein.

Ähnlich verhält es sich, wenn man z eine geschlossene Linie beschreiben läfst, die nur den Punkt b umgiebt. Man setze alsdann

$$z - b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

und lasse w mit dem Werthe w_1 von z_0 ausgehen, wo w_1 jetzt folgenden Ausdruck hat,

$$w_1 = \frac{[b - a + r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{1}{3}\varphi_0 + i\sin\frac{1}{3}\varphi_0)}.$$

Nach einem Umlaufe des z in der Richtung der wachsenden Winkel wird der Werth von w

$$= \frac{[b - a + r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}}\cos[\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi)]},$$

wobei sich jetzt der Zähler nicht geändert haben kann, weil der Verzweigungspunkt desselben, a, nicht umschrieben worden ist. Man erhält also jetzt für w den Werth

$$\frac{w_1}{\alpha} = \alpha^2 w_1, \text{ d. h. den Werth } w_3.$$

Nach einem zweiten Umlaufe erhält man

$$\frac{w_1}{\alpha^2} = \alpha w_1, \quad \text{also } w_2;$$

endlich nach einem dritten Umlaufe stellt der ursprüngliche Werth w_1 sich wieder ein, da

$$\frac{w_1}{\alpha^3} = w_1$$

ist.

Man sieht hieraus, dafs die Funktionswerthe bei mehrmaligem Umkreisen eines Verzweigungspunktes sich cyclisch mit einander vertauschen. Beim Umkreisen des Punktes a in der Richtung der wachsenden Winkel gehen

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

nach dem ersten Umlaufe der Reihe nach über in

$$w_2 \quad w_3 \quad w_1,$$

und nach dem zweiten Umlaufe in

$$w_3 \quad w_1 \quad w_2;$$

bei einem dritten Umlaufe stellen sich daher die ursprünglichen Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder ein. Ebenso gehen beim Umkreisen des Punktes b in der Richtung der wachsenden Winkel die Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

in $$w_3 \quad w_1 \quad w_2$$

und in $$w_2 \quad w_3 \quad w_1$$

über und erhalten nach dem dritten Umlaufe die ursprünglichen Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder.

Untersuchen wir nun noch, was eintritt, wenn z eine geschlossene Linie beschreibt, welche beide Punkte, a und b, enthält. Eine solche kann stets ohne Überschreitung eines dieser Punkte in eine andere übergeführt werden, die aus einer suc-

cessiven Umkreisung des einen und des andern besteht (Fig. 11). Man läfst dann z zuerst von z_0 aus den Punkt a umkreisen, nach z_0 zurückkehren und dann den Punkt b umkreisen. Auf diesem Wege erhält w bei der letzten Rückkunft nach z_0 denselben Werth, als wenn z die geschlossene Linie um beide Verzweigungspunkte durchläuft (§ 9). Geht nun w mit w_1 aus z_0 aus, so erhält es nach der Umkreisung von a den Werth $\alpha w_1 = w_2$, alsdann nach der Umkreisung von b den Werth $\frac{w_2}{\alpha} = w_1$; die Funktion bekommt also ihren ursprünglichen Werth wieder. Betrachtet man in dieser Beziehung statt der gegebenen Funktion die folgende

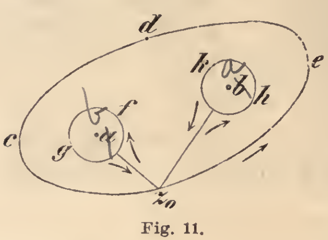


Fig. 11.

$$w' = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)},$$

bei welcher, wie man leicht übersehen wird, auch bei einer Umkreisung des Punktes b dem ursprünglichen Funktionswerthe der Factor α hinzugefügt wird, so geht bei der Umkreisung von a w_1' in $\alpha w_1' = w_2'$, und bei der Umkreisung von b, w_2' in $\alpha w_2' = w_3'$ über. Ein Umlauf um beide Punkte verwandelt also w_1' in w_3'; ein zweiter Umlauf wird daher w_3' in w_2', und ein dritter w_2' in w_1' verwandeln.

Viertes Beispiel. Die Funktion

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c},$$

welche die Wurzel der Gleichung des 6ten Grades

$$\begin{aligned}(z-b)^2 w^6 - 3\,(z-b)^2\,(z-c)\,w^4 - 2\,(z-a)\,(z-b)\,w^3 \\ + 3\,(z-b)^2\,(z-c)^2\,w^2 - 6\,(z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,w \\ + (z-a)^2 - (z-b)^2\,(z-c)^3 = 0\end{aligned}$$

ist, hat die Punkte a, b, c zu Verzweigungspunkten. Führt man der Kürze wegen

$$\sqrt[3]{z-a} = t,\ \sqrt[3]{z-b} = u,\ \sqrt{z-c} = v$$

ein und giebt dem Buchstaben α dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen Beispiele, so kann man die 6 Funktionswerthe folgendermafsen schreiben:

$$w_1 = \frac{t}{u} + v \qquad w_4 = \frac{t}{u} - v$$

$$w_2 = \alpha\frac{t}{u} + v \qquad w_5 = \alpha\frac{t}{u} - v$$

$$w_3 = \alpha^2\frac{t}{u} + v \qquad w_6 = \alpha^2\frac{t}{u} - v.$$

Betrachten wir nun zuerst Umläufe der Variablen um den Punkt a; dabei geht t in αt, $\alpha^2 t$, $t, \cdots$ über, während u und v ungeändert bleiben; demnach geht über:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
nach dem ersten Umlauf in	w_2	w_3	w_1	w_5	w_6	w_4
„ „ zweiten „ „	w_3	w_1	w_2	w_6	w_4	w_5
„ „ dritten „ „	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6.

Um diesen Verzweigungspunkt herum permutiren sich also nur die Werthe w_1, w_2, w_3 für sich, und w_4, w_5, w_6 für sich.

Bei Umläufen um den Punkt b bleiben t und v ungeändert, und u verwandelt sich in αu, $\alpha^2 u$, $u, \cdots$. Also gehen über:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
nach dem ersten Umlauf in	w_3	w_1	w_2	w_6	w_4	w_5
„ „ zweiten „ „	w_2	w_3	w_1	w_5	w_6	w_4
„ „ dritten „ „	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6;

hier permutiren sich also dieselben Funktionswerthe, wie bei a, nur in umgekehrter Aufeinanderfolge.

Bei Umläufen um den Punkt c endlich bleiben t und u ungeändert, und v verwandelt sich in $-v$, $+v, \cdots$. Daher gehen hier über:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
nach dem ersten Umlauf in	w_4	w_5	w_6	w_1	w_2	w_3
„ „ zweiten „ „	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6.

In diesem Beispiele haben wir also erstlich zwei Verzweigungspunkte a und b, um welche herum die drei Werthe w_1, w_2, w_3 cyclisch in einander übergehen, niemals aber in einen der drei übrigen Werthe; ebenso permutiren sich hier w_4, w_5, w_6 cyclisch unter einander und gehen nie in einen der drei ersteren über. Alsdann haben wir noch einen Verzweigungspunkt c, in welchem die drei Paare w_1, w_4; w_2, w_5; w_3, w_6 jedes unter sich ihre Werthe vertauschen, ohne dafs jemals ein Werth aus einem andern Paare dazu träte.

Läfst man z eine geschlossene Linie beschreiben, welche zwei Verzweigungspunkte umgiebt, so kann man eine solche wieder durch zwei successive Umkreisungen je eines Punktes ersetzen. Werden die Punkte a und b umschlossen, so verhält sich die Sache

ebenso wie bei dem vorigen Beispiele, wir wollen daher nur Umläufe um a und c verfolgen und stellen das Ergebniss in folgender Tabelle zusammen.

Umläufe	um a	um c	um beide
1	w_1 geht über in w_2	w_2 in w_5	w_1 in w_5
2	w_5 „ „ „ w_6	w_6 „ w_3	w_5 „ w_3
3	w_3 „ „ „ w_1	w_1 „ w_4	w_3 „ w_4
4	w_4 „ „ „ w_5	w_5 „ w_2	w_4 „ w_2
5	w_2 „ „ „ w_3	w_3 „ w_6	w_2 „ w_6
6	w_6 „ „ „ w_4	w_4 „ w_1	w_6 „ w_1

Dabei erreicht also w seinen ursprünglichen Werth erst nach 6 Umläufen um die Punkte a und c.

§ 11.

Die im Vorigen angestellten Betrachtungen zeigen, dafs man bei einer mehrdeutigen Funktion, indem man der Variablen complexe Werthe zuertheilt und dieselbe eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe durchlaufen läfst, die mit demselben Werthe endigen, mit dem sie begonnen haben (geometrisch ausgedrückt, indem man die Variable eine geschlossene Linie beschreiben läfst), von einem der Werthe, die eine Funktion für denselben Werth der Variablen anzunehmen vermag, zu einem andern auf stetige Weise übergehen kann. Es ist ferner gezeigt worden, dafs eine bestimmte stetige Reihenfolge der Werthe der Variablen (ein bestimmter Weg) auch stets zu einem bestimmten Funktionswerthe führt, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo der Weg der Variablen durch einen Verzweigungspunkt hindurchführt, ein Fall, der aber immer dadurch vermieden werden kann, dafs man die Variable in der Nähe des Verzweigungspunktes eine beliebig kleine Ausbiegung machen läfst*). Hieran knüpft sich nun der natürliche Wunsch, sich von der Verschiedenheit der Werthe einer mehrdeutigen Funktion zu befreien, um eine solche wie eine eindeutige behandeln zu können. Nach den früheren Auseinandersetzungen ist hiezu nur erforderlich, dafs man sich von der Verschiedenartigkeit der Wege befreie, welche die Variable zwischen zwei bestimmten Punkten durchlaufen kann. Nun bemerkte schon *Cauchy*, dafs man dies, wenigstens in

*) Betrachtet man in einem Falle, wo der Weg der Variablen durch einen Verzweigungspunkt hindurchführt, diese Lage des Weges als eine Grenzlage, welcher ein den Verzweigungspunkt nicht treffender Weg sich nähert, so wird die Unbestimmtheit aufgehoben.

beschränkter Weise, dadurch erreichen könne, dafs man gewisse Theile der Ebene, in welcher die Variable z sich bewegend gedacht wird, abgrenzt und der Veränderlichen nicht gestattet, die Grenzen eines solchen Gebietes zu überschreiten. Da nämlich eine Funktion, von einem Punkte z_0 der Variablen ausgehend, in einem andern Punkte z_1 nur dann verschiedene Werthe annehmen kann, wenn zwei von der Variablen durchlaufene Wege einen Verzweigungspunkt einschliefsen (§ 9), so ist es stets leicht, ein Stück der z-Ebene abzugrenzen, innerhalb dessen von z_0 nach z_1 zwei solche Wege nicht möglich sind, oder durch Ziehen gewisser Linien, die von Verzweigungspunkten ausgehen, und die nicht überschritten werden dürfen, solche Wege unmöglich zu machen. Innerhalb eines solchen Gebietes bleibt die Funktion eindeutig, da sie in jedem Punkte z_1 auf jedem Wege nur einen einzigen Werth erhält. Man nennt dann die Funktion in einem solchen Gebiete monodrom (nach *Cauchy*) oder einändrig (nach *Riemann*). Obwohl nun dieses Verfahren in vielen Fällen, z. B. bei der Auswerthung bestimmter Integrale, von grofsem Nutzen ist, so wird doch auf diese Weise nur ein bestimmtes Werthgebiet, oder, wie *Riemann* es nennt, ein bestimmter Zweig der mehrdeutigen Funktion von den übrigen abgeschieden und für sich betrachtet. Um eine algebraische Funktion in ihrer ganzen Vollständigkeit und doch wie eine eindeutige behandeln zu können, hat *Riemann* ein anderes Verfahren angegeben, das im Folgenden auseinandergesetzt werden soll.

Riemann nimmt an, dafs, wenn eine Funktion n-deutig ist, also jedem Werthe der Variablen n Werthe der Funktion zugehören, die Ebene der z aus n über einander liegenden Schichten oder Blättern bestehe (oder dafs n solche Blätter über der Ebene der z ausgebreitet seien), welche zusammen das Gebiet für die Variable bilden. Jedem Punkte in jedem Blatte entspricht nur ein einziger Werth der Funktion, und den n unmittelbar übereinander liegenden Punkten aller n Blätter die n verschiedenen Werthe der Funktion, die demselben Werthe von z angehören. In den Verzweigungspunkten nun, wo mehrere sonst verschiedene Funktionswerthe einander gleich sind, hängen mehrere jener Blätter zusammen, sodafs der betreffende Verzweigungspunkt zu gleicher Zeit in allen diesen zusammenhängenden Blättern liegend gedacht wird. Die Anzahl dieser so in einem Verzweigungspunkte zusammenhängenden Blätter kann für jeden Verzweigungspunkt verschieden sein und ist gleich der Anzahl der Funktionswerthe, welche beim Umlaufe der Variablen um den Verzweigungspunkt cyclisch in einander übergehen. In dem

letzten Beispiele des vorigen Paragraphen, wo die Funktion 6-werthig ist, werden wir die z-Ebene als aus 6 Blättern bestehend annehmen. Um jeden der Verzweigungspunkte a und b herum gehen einerseits die Werthe w_1, w_2, w_3 und andrerseits die Werthe w_4, w_5, w_6 in einander über; daher nehmen wir an, dafs in jedem dieser Punkte einerseits die Blätter 1, 2, 3, andrerseits die Blätter 4, 5, 6 zusammenhängen. Um den Punkt c herum dagegen gehen erstens w_1 und w_4, zweitens w_2 und w_5 und drittens w_3 und w_6 gegenseitig in einander über; daher hängen im Punkte c einmal die Blätter 1 und 4, dann die Blätter 2 und 5, und endlich die Blätter 3 und 6 zusammen. Um nun den stetigen Übergang eines Funktionswerthes in einen andern zu vermitteln, werden sogenannte Verzweigungsschnitte geführt. Dies sind ganz beliebige, nur sich selbst nicht schneidende, Linien, welche entweder von einem Verzweigungspunkte aus ins Unendliche gehen, oder zwei Verzweigungspunkte mit einander verbinden. Über diese Verzweigungsschnitte hinüber denkt man sich nun die Blätter nicht so zusammenhängend, wie sie natürlich über einander liegen, sondern so, wie die Funktionswerthe in einander übergehen. Legen wir z. B. in dem letzten Beispiele des vorigen Paragraphen einen Verzweigungsschnitt von a nach b (Fig. 14), so lassen wir, indem wir den Punkt a in

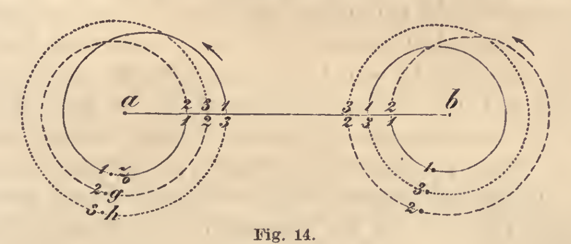


Fig. 14.

der Richtung der wachsenden Winkel umkreisen, über den Verzweigungsschnitt hinüber das Blatt 1 mit dem Blatte 2, dann 2 mit 3 und endlich 3 wieder mit 1 zusammenhängen. Wir wollen die rechte Seite des Verzweigungsschnittes $\overline{ab}$ diejenige nennen, welche ein Beobachter zur Rechten hat, wenn er sich in a befindet und nach b hinsieht. Geht dann z von einem Punkte z_0 im Blatte 1 (w mit dem Werthe w_1) aus und umkreist den Punkt a in der Richtung der wachsenden Winkel, so gelangt es, indem es den Verzweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet, aus dem ersten Blatte in das zweite und befindet sich noch darin, wenn es nach z_0 zurück oder vielmehr in den unmittelbar unter z_0 im

2ten Blatte liegenden Punkt g kommt, sodafs jetzt w den Werth w_2 erlangt hat. Wird dann der Kreislauf fortgesetzt, so gelangt z, wenn es zum zweiten Male den Verweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet, in das 3te Blatt und befindet sich noch darin, wenn es nach dem in diesem Blatte unter z_0 befindlichen Punkte h gekommen ist; jetzt hat w den Werth w_3 erhalten. Überschreitet endlich z den Verzweigungsschnitt zum dritten Male, so nehmen wir an, dafs nun die rechte Seite des 3ten Blattes sich durch das 2te Blatt hindurch mit der linken Seite des 1ten Blattes über den Verzweigungsschnitt hinüber verbinde, sodafs dann z aus dem 3ten Blatte in das 1ste hinübertritt und dann wirklich wieder nach z_0 zurückgelangt. Jetzt erst ist die Linie wirklich geschlossen, und w hat auch wieder seinen ursprünglichen Werth erlangt. In Fig. 14 sind die Linien mit den Nummern der Blätter bezeichnet, in denen sie verlaufen, und aufserdem die im 2ten und 3ten Blatte verlaufenden resp. gestrichelt und punktirt. Die Punkte z_0, g, h, welche eigentlich direct unter einander liegen sollen, sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet.

In ähnlicher Weise hat man sich die Sache bei allen Verzweigungspunkten zu denken, und da von jedem solchen Punkte ein Verzweigungsschnitt ausgeht, so kann die Variable den Verzweigungspunkt nicht umkreisen, ohne den Verzweigungsschnitt zu überschreiten und dadurch nach und nach in alle diejenigen Blätter zu gelangen, welche in dem Verzweigungspunkte zusammenhängen. Wie in jedem Falle die Verzweigungsschnitte zu legen sind, hängt von der zu untersuchenden Funktion ab und kann meist in verschiedener Weise gewählt werden. In unserem Beispiele darf man a und b durch einen solchen Schnitt verbinden, weil bei der Umkreisung des Punktes b in der Richtung der wachsenden Winkel die Funktion w_1 in w_3, und diese in w_2 übergeht (Fig. 14), und daher

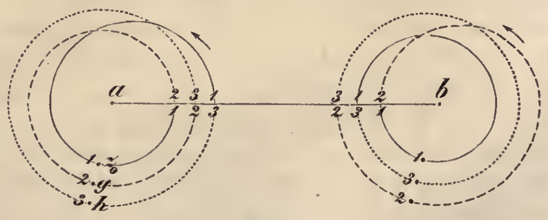


Fig. 14.

bei b dieselben Blätter und in derselben Weise zusammenhängen wie bei a, nämlich die rechte Seite von 1 mit der linken von 2,

die rechte Seite von 2 mit der linken von 3, und die rechte Seite von 3 mit der linken von 1*).

Bleiben wir noch bei diesem Beispiele stehen, und untersuchen wir auch den im vorigen Paragraphen besprochenen Umlauf um a und b und um a und c. Bei einem Umlaufe um a und b wird der Verzweigungsschnitt gar nicht überschritten, sodafs z im ersten Blatte bleibt; in der That erhält nach einem solchen Umlaufe w in z_0 seinen Anfangswerth wieder (vgl. Beisp. 3. § 10). Um die Umkreisung der Punkte a und c zu untersuchen, legen wir von c aus einen Verzweigungsschnitt ins Unendliche und lassen hier je zwei der Blätter 1, 4; 2, 5; 3, 6 gegenseitig in einander übergehen.

Für die hier stattfindenden Übergänge der Funktionswerthe hatten wir S. 51 folgende Tabelle gefunden:

Umläufe	um a	um c	um beide
1	w_1 geht über in w_2	w_2 in w_5	w_1 in w_5
2	w_5 „ „ „ w_6	w_6 „ w_3	w_5 „ w_3
3	w_3 „ „ „ w_1	w_1 „ w_4	w_3 „ w_4
4	w_4 „ „ „ w_5	w_5 „ w_2	w_4 „ w_2
5	w_2 „ „ „ w_3	w_3 „ w_6	w_2 „ w_6
6	w_6 „ „ „ w_4	w_4 „ w_1	w_6 „ w_1

*) Wenn man sich diese Vorstellungsweise durch ein Modell anschaulich machen will, so besteht eine Schwierigkeit einmal darin, dafs die Blätter der Fläche einander durchdringen, und dann darin, dafs häufig in den Verzweigungspunkten mehrere Blätter zusammenhängend gedacht werden müssen, die nicht unmittelbar übereinander liegen. Allein zum Zwecke der Veranschaulichung kommt es meistentheils nur darauf an, gewisse Linien in ihrem Verlaufe durch die verschiedenen Blätter der Fläche verfolgen zu können. Dies ist leicht in folgender Weise erreichbar: Man schneide zunächst in die übereinander gelegten Papierblätter, welche die Fläche vorstellen sollen, die Verzweigungsschnitte ein und verbinde dann nur an denjenigen Stellen, wo eine Linie aus einem Blatte über einen Verzweigungsschnitt in ein anderes Blatt hinübertreten soll, die betreffenden Blätter durch übergeklebte Papierstreifen. Dann kann man es immer so einrichten, dafs, wenn die Linie wieder in das erste Blatt, von welchem sie ausgegangen ist, zurückgelangen soll, man für die Anbringung eines zur Vermittelung dieses Überganges dienenden Papierstreifens den nöthigen Raum übrig hat. Durch diese übergeklebten Papierstreifen wird nun die Verbindung der einzelnen Blätter zu einer zusammenhängenden Fläche schon hergestellt; und es ist dann weiter nicht nothwendig, die Blätter in den Verzweigungspunkten an einander zu befestigen.

Diese Übergänge sind in Fig. 15 dargestellt, indem jede Linie mit der Nummer des Blattes bezeichnet ist, in welchem sie verläuft. Die eigentlich unter dem Ausgangspunkte 1 liegenden Punkte sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und den letzten Punkt 1 hat man sich mit dem ersten als zusammenfallend zu denken.

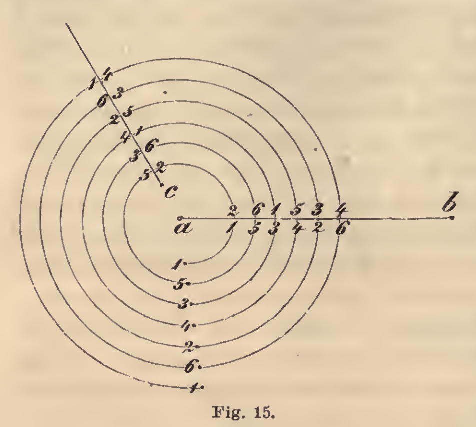


Fig. 15.

Dieses in unserem Beispiele aus 6 Blättern bestehende Gebiet für die Veränderliche z bildet nun eine einzige zusammenhängende Fläche, indem die Blätter in den Verzweigungspunkten zusammenhängen und längs der Verzweigungsschnitte in einander übergehen. In dieser Fläche ist w eine vollkommen eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche, da sie in jedem Punkte der letzteren denselben Werth erlangt, auf welchem Wege auch die Variable zu dem Punkte gelangen möge. Beschreibt z zwischen zwei Punkten zwei Wege, welche einen Verzweigungspunkt einschliefsen, so mufs einer von beiden nothwendig einen Verzweigungsschnitt überschreiten und dadurch in ein anderes Blatt gelangen, sodafs die Endpunkte der beiden Wege nicht mehr als zusammenfallend, sondern als zwei verschiedene Punkte der z-Fläche zu betrachten sind, in denen dann auch verschiedene Funktionswerthe statthaben. Beschreibt aber z eine wirklich geschlossene Curve, d. h. fallen Anfangs- und Endpunkt der Curve in den nämlichen Punkt des nämlichen Blattes zusammen, so erhält auch die Funktion den Anfangswerth wieder. Nur wenn die Variable durch einen Verzweigungspunkt hindurch geht, kann sie nach Belieben in jedes der hier zusammenhängenden Blätter übergehen, und dann bleibt es unbestimmt, welchen Werth die Funktion annimmt. (§ 8.)

§ 12.

Um nun nachzuweisen, dafs auch im Allgemeinen durch eine die z-Ebene n-fach bedeckende Fläche, deren einzelne Blätter in den Verzweigungspunkten und längs der Verzweigungsschnitte in

der oben erläuterten Weise zusammenhängen, eine n-deutige Funktion in eine eindeutige verwandelt werden kann, nehmen wir zunächst die z-Ebene noch einfach an und lassen die Variable z von einem beliebigen Punkte z_0 aus eine geschlossene Linie durchlaufen, welche nur einen Verzweigungspunkt einmal umgiebt und durch keinen andern Verzweigungspunkt hindurch führt. In z_0 besitzt die Funktion n Werthe; denken wir uns diese in irgend einer Reihenfolge aufgeschrieben. Hat nun die Variable die geschlossene Linie durchlaufen und ist wieder nach z_0 zurückgekehrt, so wird jeder der obigen n Funktionswerthe entweder in einen andern übergegangen oder ungeändert geblieben sein. Diese neuen Werthe können, da die Variable z sich wieder in dem Punkte z_0 befindet, von den früheren in ihrer Gesammtheit nicht verschieden sein; denken wir sie uns aber in der Reihenfolge aufgeschrieben, wie sie aus den früheren der Reihe nach entstanden sind, so werden sie jetzt in einer andern Anordnung auftreten, als vorhin.

Nun kann aber jede beliebige Anordnung von n Elementen aus einer andern Anordnung durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden. Unter einer cyclischen Vertauschung $p$ter Ordnung versteht man nämlich eine solche, bei welcher man aus den vorhandenen n Elementen beliebige p herausgreift und nun an die Stelle des ersten von diesen ein zweites, an Stelle dieses ein drittes u. s. w., endlich an Stelle des $p$ten wieder das erste setzt. Eine solche cyclische Vertauschung $p$ter Ordnung hat die Eigenschaft, dafs nach p Wiederholungen derselben, und nicht früher, die ursprüngliche Anordnung wieder zum Vorschein kommt; denn da an die Stelle jedes Elementes ein anderes, an die Stelle des $p$ten aber das erste tritt, so kann jedes Element erst dann wieder an seiner ursprünglichen Stelle erscheinen, wenn die sämmtlichen $p-1$ andern Elemente an derselben Stelle aufgetreten sind, dann aber tritt jedes Element auch wirklich wieder an seine ursprüngliche Stelle. Um nun nachzuweisen, dafs jede Anordnung aus einer andern durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden kann, nehmen wir an, irgend eine Anordnung entstehe aus einer andern so, dafs an die Stelle eines Elementes, z. B. 1 ein anderes, z. B. 3, getreten sei. An die Stelle von 3 tritt dann entweder 1, und dann haben wir schon eine cyclische Vertauschung zweiter Ordnung, oder ein anderes z. B. 5. An die Stelle dieses letzteren tritt nun wieder entweder das erste 1, und dann haben wir eine cyclische Vertauschung dritter Ordnung, oder wiederum ein anderes, das von den schon benutzten 1, 3, 5 verschieden ist. An die

Stelle dieses kann entweder das erste treten, wodurch eine cyclische Vertauschung geschlossen wäre, oder wieder ein anderes; einmal aber muſs die cyclische Vertauschung sich schlieſsen, weil überhaupt nur eine endliche Anzahl von Elementen vorhanden ist, und das erste Element 1 sich an irgend einer Stelle der zweiten Anordnung vorfinden muſs. Auf diese Weise ist dann eine Reihe von Elementen abgefertigt. Beginnt man nun mit irgend einem der noch nicht verwendeten Elemente, so kann man das vorige Verfahren wiederholen, bis alle Elemente erschöpft sind, und hat so eine gewisse Anzahl cyclischer Vertauschungen erhalten, welche, nach einander oder auch gleichzeitig angewendet, die zweite Anordnung aus der ersten erzeugen. Hat ein Element bei der zweiten Anordnung seine Stelle nicht geändert, so kann eine Nichtänderung als eine cyclische Vertauschung erster Ordnung angesehen werden. Ein Beispiel möge das Vorige erläutern. Seien die 11 Elemente

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11$$

in die Anordnung

$$3 \quad 11 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 10 \quad 1 \quad 9 \quad 6 \quad 8 \quad 4$$

übergegangen; so sieht man, daſs nach der Reihe

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7$$

in

$$3 \quad 5 \quad 7 \quad 1$$

übergegangen sind; diese bilden also eine cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Geht man dann von 2 aus, so zeigt sich, daſs

$$2 \quad 11 \quad 4$$

in

$$11 \quad 4 \quad 2$$

übergehen, also hat man eine zweite cyclische Vertauschung dritter Ordnung. Das nächste noch nicht verwendete Element ist 6. Dann geht

$$6 \quad 10 \quad 8 \quad 9$$

in

$$10 \quad 8 \quad 9 \quad 6$$

über, und man hat eine dritte cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Jetzt sind alle 11 Elemente erschöpft, und folglich wird die zweite gegebene Anordnung aus der ersten durch die gefundenen drei cyclischen Vertauschungen erzeugt.

Kehren wir nun zu unseren Funktionswerthen zurück, so folgt, daſs, was auch immer für eine Anordnung derselben durch den Umlauf der Variablen um den Verzweigungspunkt entstanden sein mag, dieselbe durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen der Funktionswerthe hervorgebracht werden kann. Läſst man die Variable den nämlichen Verzweigungspunkt noch einmal umkreisen, so erleidet jeder Funktionswerth die nämliche Änderung wieder, die er das erste Mal erfuhr. Bei diesem zweiten Umlaufe bleiben also die

Cyclen dieselben, wie bei dem ersten, und so auch bei jedem folgenden. Auf diese Weise theilen sich die Funktionswerthe bei jedem Verzweigungspunkte (wenn sie nicht sämmtlich einen einzigen Cyclus bilden, was auch vorkommen kann, vgl. Beisp. 3 § 10) in eine Reihe von Cyclen, sodafs in jedem Cyclus nur gewisse bestimmte Funktionswerthe sich unter einander permutiren, ohne dafs jemals ein in einem andern Cyclus enthaltener Werth dazu treten kann (vgl. Beisp. 4 § 10). Wenn ein einzelner Funktionswerth bei dem Umlaufe der Variablen um den Verzweigungspunkt sich nicht ändert, so kann ein solcher nach der obigen Bemerkung als für sich allein einen Cyclus erster Ordnung bildend angesehen werden. Läfst man jetzt die Variable z eine ganz beliebige geschlossene Linie beschreiben, so kann diese in eine Reihe von Umkreisungen einzelner Verzweigungspunkte umgeformt werden (§ 9). Daher kann auch die durch diese geschlossene Linie entstehende Anordnung durch die bei den Verzweigungspunkten stattfindenden cyclischen Vertauschungen erzeugt werden.

Wenn nun die z-Fläche als aus n Blättern bestehend angesehen wird, so rechtfertigt das Vorige die Annahme, dafs in jedem Verzweigungspunkte bestimmte Gruppen von Blättern als zusammenhängend gedacht werden, welche über die Verzweigungsschnitte hinüber in der oben angegebenen Weise sich in einander fortsetzen. Die Variable gelangt dann, wenn sie einen Verzweigungspunkt umkreist, nach und nach in alle die Blätter, welche derselben Gruppe angehören, und nur in diese, und kehrt zuletzt in dasjenige Blatt zurück, von welchem sie ausgegangen ist.

Um für eine gegebene n-werthige algebraische Funktion die *Riemann*'sche n-blättrige Fläche zu bilden, bestimme man zuerst die Verzweigungspunkte derselben und wähle irgend einen bestimmten Werth z_0 von z aus, der aber nicht selbst ein Verzweigungspunkt sei. Man lasse dann die Variable z in der einfachen z-Ebene, immer von z_0 ausgehend und wieder dahin zurückkehrend, jeden einzelnen Verzweigungspunkt einmal umkreisen und ermittle, wie die in z_0 stattfindenden Funktionswerthe bei jedem Verzweigungspunkte sich in die früher erwähnten Cyclen theilen, und wie sie sich innerhalb derselben unter einander permutiren*).

*) Vgl. darüber: *Puiseux*, Recherches sur les fonctions algébriques (*Liouville*, Journ. de math. T. XV). (Deutsch von *H. Fischer*, *Puiseux*'s Untersuchungen über die algebraischen Funktionen. Halle 1861.) — *Königsberger,* Vorlesungen über die Theorie der ell. Funktionen. Leipzig 1874. I. S. 181.

Bezeichnet man dann, nachdem dies festgestellt ist, in der n-blättrigen Fläche die den Werth z_0 repräsentirenden Punkte der n Blätter der Reihe nach mit z_1^0, z_2^0, ... z_n^0, sodafs der Index zugleich das Blatt bezeichne, in welchem der Punkt sich befindet, so können zunächst die für z_0 statthabenden Funktionswerthe beliebig auf die Blätter vertheilt werden, d. h. man kann in beliebig gewählter, aber bestimmter Weise annehmen, welcher dieser Funktionswerthe jedem der Punkte z_1^0, z_2^0, ... z_n^0 angehören soll. Wir wollen diese Werthe der Reihe nach mit w_1^0, w_2^0, ... w_n^0 bezeichnen. Alsdann ziehe man von jedem Verzweigungspunkte einen Verzweigungsschnitt ins Unendliche und bestimme bei jedem der letzteren den Zusammenhang der Blätter so, dafs er genau den vorher ermittelten Cyclen entspreche. Wenn also in der einfachen z-Ebene bei einmaliger Umkreisung eines bestimmten Verzweigungspunktes w_α^0 in w_β^0, $w_\varkappa^0$ in w_λ^0 u. s. w. übergeführt wird, so bestimme man in der n-blättrigen Fläche den Zusammenhang der Blätter so, dafs bei einmaliger Umkreisung des nämlichen Verzweigungspunktes die Variable von z_α^0 nach z_β^0, von $z_\varkappa^0$ nach z_λ^0, u. s. w. gelangt. Erleidet ein einzelner Funktionswerth w_μ^0 dabei keine Änderung, so wird das entsprechende Blatt μ in diesem Verzweigungspunkte mit keinem andern Blatte in Zusammenhang gesetzt, sodafs das Blatt μ über den Verzweigungsschnitt sich in sich selbst fortsetzt, also der Verzweigungsschnitt in diesem Blatte gar nicht gezogen zu werden braucht. Wenn, wie angenommen wurde, von jedem Verzweigungspunkte ein Verzweigungsschnitt ins Unendliche geht, so kann der Zusammenhang der Blätter bei jedem unabhängig von den anderen bestimmt werden. Dies schliefst aber nicht aus, dafs man nicht auch bisweilen zwei Verzweigungspunkte durch einen Verzweigungsschnitt verbinden, oder von einem Verzweigungspunkte mehrere Verzweigungsschnitte ausgehen lassen könne; doch darf dies nur dann stattfinden, wenn die vorher ermittelte Art, wie die Funktionswerthe bei dem betreffenden Verzweigungspunkte sich unter einander permutiren, eine solche Anordnung erlaubt. So kann man bei dem im vorigen Paragraphen betrachteten Beispiele einer 6-werthigen Funktion von jedem der drei Verzweigungspunkte a, b, c einen Verzweigungsschnitt ins Unendliche ziehen; aber die Art, wie die Funktionswerthe sich um a und b herum permutiren, gestattet, dafs man auch a und b durch einen Verzweigungsschnitt verbinden kann.

Sind diese Bestimmungen einmal festgestellt, so vertheilen sich nun die Funktionswerthe für jeden Werth von z in bestimmter

Weise auf die n Blätter. Um dies nachzuweisen braucht man, da in der einfachen z-Ebene die verschiedenen Werthe, welche die Funktion in ein und demselben Punkte z haben kann, nur durch die verschiedenen nach z führenden Wege hervorgebracht werden, nur zu zeigen, dafs, wenn man in der n-blättrigen Fläche von einem bestimmten Punkte, etwa von $z_1{}^0$ aus, und mit dem bestimmten Werthe $w_1{}^0$ beginnend auf irgend zwei verschiedenen Wegen nach dem nämlichen beliebig gewählten Punkte z_λ gelangt, man immer auf beiden Wegen zu demselben Funktionswerthe geführt wird. Wir müssen bei diesem Nachweise verschiedene Fälle unterscheiden:

1) Nehmen wir zuerst an, der Endpunkt eines von $z_1{}^0$ ausgehenden Weges sei einer der den Werth z_0 repräsentirenden Punkte, also etwa $z_\lambda{}^0$. Dann bildet der entsprechende Weg in der einfachen z-Ebene eine geschlossene Linie. Diese kann in eine Reihe von geschlossenen Umläufen um einzelne Verzweigungspunkte umgeformt werden, ohne dafs der Endwerth der Funktion ein anderer wird. Dem entspricht in der n-blättrigen Fläche, dafs die Variable ebenfalls einzelne Verzweigungspunkte umkreist und sich bei jeder Umkreisung zu demjenigen der Punkte $z_1{}^0$, $z_2{}^0$, ... $z_n{}^0$ begiebt, den sie bei dieser erreichen kann. Die Punkte, zu denen sie auf diese Weise gelangt, mögen der Reihe nach mit $z_1{}^0$, $z_\alpha{}^0$, $z_\beta{}^0$, ... $z_\varkappa{}^0$, $z_\lambda{}^0$ bezeichnet werden. Nach dem, was oben über die Vertheilung der Funktionswerthe festgesetzt wurde, und da hier immer nur einmalige Umläufe um je einen Verzweigungspunkt in Betracht kommen, nimmt dann w der Reihe nach die Werthe $w_1{}^0$, $w_\alpha{}^0$, $w_\beta{}^0$, ... $w_\varkappa{}^0$, $w_\lambda{}^0$ an. Mit irgend einem andern in $z_1{}^0$ beginnenden und in $z_\lambda{}^0$ endigenden Wege kann nun die nämliche Umformung vorgenommen werden, doch wird jetzt die Variable im Allgemeinen in andere Blätter gelangen als vorhin. Nehmen wir an, die Umkreisungen führen die Variable von $z_1{}^0$ nach und nach zu $z_a{}^0$, $z_b{}^0$, ... $z_k{}^0$ und schliefslich nach $z_\lambda{}^0$; dann ist die entsprechende Reihe der Funktionswerthe $w_1{}^0$, $w_a{}^0$, $w_b{}^0$ .... $w_k{}^0$, und da der letzte Umlauf der Annahme nach von $z_k{}^0$ nach $z_\lambda{}^0$ führt, so mufs schliefslich auch $w_k{}^0$ nach $w_\lambda{}^0$ übergeführt werden. Wir geben hierzu ein Beispiel.

Bei der § 11 vorgeführten 6-blättrigen Fläche kann man z. B. von $z_1{}^0$ nach $z_3{}^0$ kommen, indem man den Punkt a zwei mal umkreist, wodurch man von $z_1{}^0$ nach $z_2{}^0$ und $z_3{}^0$ gelangt. Man kann aber unter anderen auch folgenden Weg einschlagen: von $z_1{}^0$ um a nach $z_2{}^0$, dann um c nach $z_5{}^0$, dann um a nach $z_6{}^0$, und zu-

letzt um c nach z_3^0. Bei dem ersten Wege durchläuft w die Werthe w_1^0, w_2^0, w_3^0; bei dem zweiten w_1^0, w_2^0, w_5^0, w_6^0, w_3^0, der Endwerth aber ist auf beiden Wegen derselbe. — Als speziellen Fall heben wir hervor, dafs, wenn die Variable auf irgend einem Wege wieder nach dem Ausgangspunkte z_1^0 zurückgelangt, die Funktion auch den ursprünglichen Werth w_1^0 wieder erhält.

2) Wir betrachten ferner zwei dieselben Punkte verbindenden Wege A und B, welche ganz in einem und demselben Blatte verlaufen, also z. B. wenn wir z_1^0 wieder als Ausgangspunkt annehmen, ganz in dem Blatte 1. Wenn dann die beiden Wege keinen Verzweigungspunkt einschliefsen, so ist eine besondere Erörterung nicht nöthig, da die entsprechenden Wege in der einfachen z-Ebene auch keinen Verzweigungspunkt einschliefsen, und daher zu demselben Funktionswerthe führen (§ 9). Wenn aber die betrachteten Wege Verzweigungspunkte einschliefsen, so bemerke man, dafs dieser Fall nur dann eintreten kann, wenn von keinem der eingeschlossenen Verzweigungspunkte aus ein Verzweigungsschnitt ins Unendliche geht, denn sonst müfste mindestens einer der Wege den Verzweigungsschnitt überschreiten und könnte nicht ganz in demselben Blatte verlaufen. Es kann also der vorliegende Fall nur dann eintreten, wenn mehrere Verzweigungspunkte von den beiden Wegen umschlossen werden, und jeder Verzweigungsschnitt zwei Verzweigungspunkte mit einander verbindet. Wenn man nun in der einfachen z-Ebene dem einen Wege, z. B. B, Umläufe um alle eingeschlossenen Verzweigungspunkte vorhergehen läfst, so erhält man einen neuen Weg C, welcher zu demselben Funktionswerthe führt, wie A. Führt man aber diese Umläufe in der n-blättrigen Fläche aus, so führen diese wieder nach z_1^0 zurück, denn jeder Verzweigungsschnitt verbindet zwei Verzweigungspunkte, bei der auf einander folgenden Umkreisung der letzteren mufs also der Verzweigungsschnitt zweimal in entgegengesetzter Richtung überschritten werden; man gelangt daher immer wieder in das Blatt 1 und demnach schliefslich auch nach z_1^0 zurüek. Nach dem, was in dem vorhergehenden Falle bewiesen wurde, erlangt dann auch die Funktion in z_1^0 wieder den Werth w_1^0. Da nun aber der Weg C, welcher aus den Umkreisungen und dem Wege B besteht, zu demselben Werthe führt, wie A, und die Funktion den Weg B mit dem Werthe w_1^0 beginnt, so mufs auch dieser allein zu demselben Werthe führen, wie A.

3) Schliefslich nehmen wir als Endpunkt der zu untersuchenden Wege irgend einen in einem beliebigen Blatte λ liegenden

Punkt z_λ an. Der Anfangspunkt sei wie vorhin z_1^0. Man kann zunächst einem solchen Wege ohne Änderung des Endwerthes der Funktion einen andern substituiren, welcher zuerst nach z_λ^0 und dann ganz im Blatte λ verlaufend nach z_λ führt; denn man kann bei den entsprechenden Wegen in der einfachen z-Ebene das Endstück des zweiten immer so wählen, dafs dieser in den ersten umgeformt werden kann, ohne dafs ein Verzweigungspunkt überschritten zu werden braucht. Macht man nun dieselbe Umformung bei zwei verschiedenen Wegen, so führen beide zuerst nach z_λ^0; hier erlangt die Funktion auf beiden Wegen nach 1) den Werth w_λ^0. Die noch übrigen Theile der beiden Wege verlaufen ganz in dem Blatte λ, beginnen in demselben Punkte z_λ^0 und mit dem nämlichen Funktionswerthe w_λ^0, also führen auch beide nach 2) zu demselben Funktionswerthe in z_λ.

Hiedurch ist nachgewiesen, dafs, nachdem die obigen willkürlich zu wählenden Feststellungen gemacht sind, die Funktion in jedem Punkte der Fläche einen bestimmten von dem Wege unabhängigen Werth erhält und zu einer eindeutigen Funktion des Ortes in der Fläche wird. Dadurch ist dann die Vieldeutigkeit der algebraischen Funktionen*) aufgehoben, und wir werden nun im folgenden stets annehmen, dafs das Gebiet der Veränderlichen aus so vielen Blättern bestehe, als nöthig sind, um eine zu betrachtende vieldeutige Funktion in eine eindeutige zu verwandeln, und werden zwei Punkte nur dann als identisch betrachten, wenn sie auch demselben Blatte der Fläche angehören. Demgemäfs nennen wir eine Linie nur dann wirklich geschlossen, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt in dem nämlichen Punkte des nämlichen Blattes zusammenfallen. Endigt dagegen eine Linie in einem Punkte, der unter oder über dem Anfangspunkte in einem andern Blatte liegt, so werden wir die Linie bisweilen scheinbar geschlossen nennen.

§ 13.

An das Vorige knüpfen sich noch einige Bemerkungen. Beim Überschreiten eines Verzweigungsschnittes setzt sich, wie erläutert worden ist, ein Blatt in ein anderes fort, in der Art, dafs, wenn

*) Man kann zwar auch solchen Funktionen wie $\log z$, $\operatorname{arctg} z$, u.s.w. Verzweigungspunkte zuschreiben, allein dann müfste man annehmen, dafs in einem Verzweigungspunkte unendlich viele Blätter der Fläche zusammenhängen. Wir werden daher die genannten Funktionen später unter dem Gesichtspunkte von Integralfunktionen betrachten.

die Variable sich auf demselben fortbewegt, die Funktion sich stetig ändert. Daraus folgt, was wohl zu beachten ist, dafs die Funktion in dem nämlichen Blatte zu beiden Seiten eines Verzweigungsschnittes immer verschiedene Werthe hat. Nehmen wir z. B. an, über einen Verzweigungsschnitt hinüber setze sich ein Blatt $\varkappa$ in ein anderes λ fort, und es seien $z_\varkappa$ und z_λ zwei denselben Werth von z repräsentirende Punkte, welche in resp. $\varkappa$ und λ und in unendlicher Nähe des Verzweigungsschnittes liegen. Ferner sei $z_\varkappa'$ der Punkt, welcher in $\varkappa$ dem $z_\varkappa$ auf der andern Seite des Verzweigungsschnittes und in unendlicher Nähe desselben gerade gegenüberliegt. Alsdann gelangt die Variable bei der Umkreisung des betreffenden Verzweigungspunktes von $z_\varkappa$ über $z_\varkappa'$ nach z_λ. Demnach bilden $z_\varkappa'$ und z_λ eine stetige Aufeinanderfolge, nicht aber $z_\varkappa$ und z_λ. Bezeichnen nun $w_\varkappa$, $w_\varkappa'$, w_λ die resp. in $z_\varkappa$, $z_\varkappa'$, z_λ stattfindenden Funktionswerthe, so bildet w_λ die stetige Fortsetzung von $w_\varkappa'$, und nicht von $w_\varkappa$, und läfst man den zwischen w_λ und $w_\varkappa'$ stattfindenden unendlich kleinen Unterschied aufser Acht, so kann man sagen, es ist $w_\varkappa' = w_\lambda$; da aber w_λ von $w_\varkappa$ verschieden ist, so sind auch $w_\varkappa$ und $w_\varkappa'$ von einander verschieden. Bei der Funktion $w = \sqrt{z}$ z. B. besteht die Fläche aus zwei Blättern, die in dem Verzweigungspunkte $z = 0$ zusammenhängen. Hier ist $w_\lambda = - w_\varkappa$ (vgl. § 10 Beisp. 1) und also auch $w_\varkappa' = - w_\varkappa$. In diesem Beispiele besitzen daher zu beiden Seiten des Verzweigungsschnittes die Funktionswerthe in dem nämlichen Blatte entgegengesetzte Vorzeichen.

Riemann nennt die Verzweigungspunkte auch Windungspunkte, weil die Fläche sich um einen solchen Punkt wie eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Ganghöhe herumwindet. Hängen dann in einem solchen Punkte nur zwei Blätter der Fläche zusammen, so heifst derselbe ein einfacher Verzweigungspunkt oder ein Windungspunkt erster Ordnung, hängen aber in ihm n Blätter der Fläche zusammen, so heifst er ein Verzweigungspunkt oder Windungspunkt $(n - 1)$ter Ordnung. Für manche Untersuchungen ist es nun wichtig zu zeigen, dafs ein Windungspunkt $(n - 1)$ter Ordnung so angesehen werden kann, als wenn in ihm $n - 1$ einfache Verzweigungspunkte zusammengefallen wären. Nehmen wir beispielsweise $n = 5$ an, so gelangt bei einem Verzweigungspunkte, in welchem 5 Blätter zusammenhängen, die Variable nach jedem Umlaufe in das nächstfolgende Blatt, und eine Curve mufs 5 Umläufe um den Verzweigungspunkt machen, ehe sie wieder in das erste zurückgelangt

und sich schliefst. Dasselbe findet aber auch statt, wenn man 4 einfache Verzweigungspunkte a, b, c, d annimmt, in welchen der Reihe nach folgende Blätter zusammenhängen:

in	a	b	c	d
	1 und 2	1 und 3	1 und 4	1 und 5.

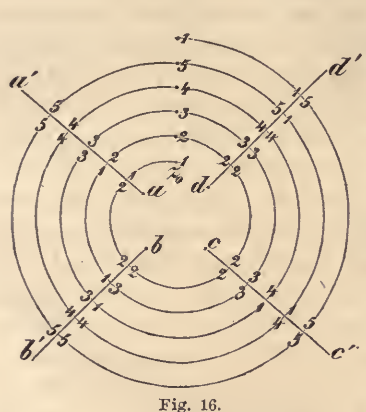


Fig. 16.

In Fig. 16 sind aa', bb', cc', dd' die Verzweigungsschnitte, und die Zahlen bedeuten die Nummern der Blätter, in welchen die Linien verlaufen. Überschreitet die Curve von z_0 aus den Schnitt aa', so tritt sie aus 1 in 2 und bleibt bei dem ganzen Umlaufe in 2, weil dies Blatt in keinem der Punkte b, c, d mit einem andern zusammenhängt. Beim ersten Umlaufe kommt also die Curve aus 1 nach 2. Wird nun aa' zum zweiten Male überschritten, so tritt sie aus 2 in 1 und dann bei bb' aus 1 in 3. Dann aber bleibt sie bis zur Rückkunft nach z_0 in 3, also bringt der 2te Umlauf sie nach 3. Erst bei bb' tritt sie wieder aus 3 in 1 und dann bei cc' aus 1 in 4. In dieser Weise bringt jeder neue Umlauf die Curve in das nächstfolgende Blatt; nach dem 5ten Umlaufe gelangt sie daher in das erste Blatt zurück und schliefst sich. Man sieht also, dafs die Übergänge hier in derselben Weise stattfinden, wie bei einem Windungspunkte 4ter Ordnung. Läfst man daher die vier einfachen Verzweigungspunkte, so wie auch die Verzweigungsschnitte, sich einander nähern und schliefslich zusammenfallen, so bleibt alles ungeändert. Es zeigt sich zugleich in diesem einfachen Falle, dafs die Anzahl der Umläufe, welche eine Curve um ein Gebiet machen mufs, um sich zu schliefsen, um 1 gröfser ist, als die Anzahl der in diesem Gebiete enthaltenen einfachen Verzweigungspunkte, da der Windungspunkt 4ter Ordnung 4 einfachen Verzweigungspunkten äquivalent ist. Es soll später gezeigt werden, dafs diese Beziehung allgemein gilt.

§ 14.

Zur vollständigen Behandlung der algebraischen Funktionen ist noch erforderlich, dafs auch unendlich grofse Werthe der Variablen z in Betracht gezogen werden. In der Ebene, in der z

sich bewegt, kann diese Variable von irgend einem Punkte, z. B. vom Nullpunkte aus, nach allen Richtungen sich ins Unendliche entfernen. Denkt man sich nun aber die Ebene im Unendlichen geschlossen, als eine Kugel mit unendlich grofsem Radius, so kann man sich vorstellen, dafs alle jene ins Unendliche gehenden Richtungen in einem bestimmten Punkte der Kugel wieder zusammentreffen, und demgemäfs kann dann der Werth $z = \infty$ durch einen bestimmten Punkt auf der Kugelfläche dargestellt werden. Man gelangt zu derselben Vorstellung, wenn man annimmt, dafs die z-Ebene im Nullpunkte von einer beliebig grofsen Kugel berührt werde. Denken wir uns den Berührungspunkt als den Nordpol der Kugel. Dann kann jeder Punkt z der Ebene auf die Kugelfläche dadurch projicirt werden, dafs man von dem Südpole s der Kugel aus eine gerade Linie nach dem Punkte z zieht und mit dieser die Kugelfläche schneidet. Projicirt man aber auf diese Weise die unendlich fernen Punkte der z-Ebene auf die Kugelfläche, so fallen die Projectionen sämmtlich in den Punkt s hinein, durch den dann also der Werth $z = \infty$ dargestellt wird.

Besteht nun die z-Ebene aus n Blättern, so kann auch die Kugelfläche als aus n Blättern bestehend gedacht werden, und man kann annehmen, dafs die den Werth $z = \infty$ darstellenden Punkte der n Blätter gerade über einander liegen. Dann ist es auch denkbar, dafs mehrere Blätter in dem Punkte ∞ zusammenhängen, und dafs dieser ein Verzweigungspunkt ist. Um bei einer gegebenen Funktion $w = f(z)$ zu entscheiden, ob $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt ist, braucht man nur $z = \frac{1}{u}$ zu setzen. Geht dann $f(z)$ in $\varphi(u)$ über, so liefert jeder Verzweigungspunkt $z = a$ von $f(z)$ für $\varphi(u)$ einen Verzweigungspunkt $u = \frac{1}{a}$, und umgekehrt jeder Verzweigungspunkt $u = b$ von $\varphi(u)$ einen solchen $z = \frac{1}{b}$ von $f(z)$; daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt von $f(z)$ oder nicht, jenachdem $u = 0$ ein Verzweigungspunkt von $\varphi(u)$ ist, oder nicht. Man kann die Variable z auf der Kugelfläche auch den Punkt ∞ umkreisen lassen und erfährt, ob $f(z)$ dabei eine Werthänderung erleidet oder nicht, und welcher Art diese Werthänderung ist, wenn man in Beziehung hierauf die Funktion $\varphi(u)$ untersucht, während die Variable u den Punkt $u = 0$ umkreist.

Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche kann man

nun aber nicht mehr einen unbestimmt ins Unendliche verlaufenden Verzweigungsschnitt ziehen, sondern, wenn ein solcher ins Unendliche geht, so endet er jetzt in dem bestimmten Punkte $z = \infty$. Dadurch entsteht ein Bedenken, welches behoben werden mufs. Es seien nämlich $a, b, c, \ldots$ die endlichen Verzweigungspunkte einer vorgelegten Funktion $f(z)$, und wir wollen annehmen, diese Punkte seien durch Verzweigungsschnitte mit dem Punkte $z = \infty$ verbunden. Hat man nun, wie es S. 60 erläutert wurde, die für irgend einen bestimmten Werth z_0 stattfindenden Funktionswerthe $w_1^0, w_2^0, \ldots w_n^0$ in beliebiger Weise auf die Punkte $z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$ vertheilt und dann den Zusammenhang der Blätter über die Verzweigungsschnitte so bestimmt, wie es die gegebene Funktion $f(z)$ verlangt, so darf für den Punkt $z = \infty$ nichts willkürlich angenommen werden, sondern die Art, wie die Blätter bei den in diesen Punkt einmündenden Verzweigungsschnitten unter einander zusammenhängen, ist durch die vorigen Annahmen schon bestimmt. Es fragt sich dann aber, ob diese mit der Natur der gegebenen Funktion $f(z)$ wirklich übereinstimmt, d. h. ob dadurch diejenige Werthänderung (oder event. Nichtänderung) hervorgebracht wird, welche $f(z)$ bei einer Umkreisung des Punktes $z = \infty$ wirklich erfährt. Wenn dies nicht der Fall wäre, würde es nicht möglich sein, die *Riemann*'sche Kugelfläche so einzurichten, dafs sich die gegebene Funktion bei Berücksichtigung des unendlich grofsen Werthes von z in eine eindeutige verwandelt.

Nun ist aber auf der einfachen Kugelfläche eine geschlossene Linie Z, welche den Punkt $z = \infty$ und keinen andern Verzweigungspunkt umgiebt, zugleich eine solche, die alle endlichen Verzweigungspunkte $a, b, c, \ldots$ einschliefst. Da die letztere in geschlossene Linien, welche die Verzweigungspunkte $a, b, c, \ldots$ einzeln umkreisen, aufgelöst werden kann, so tritt für $f(z)$ beim Durchlaufen der Linie Z dieselbe Werthänderung ein, wie wenn die Punkte $a, b, c, \ldots$ hinter einander einzeln umkreist werden. Diese ist aber in der n-blättrigen Fläche nach den früher gemachten Festsetzungen zugleich diejenige, die auch eintritt, wenn die von $a, b, c, \ldots$ nach ∞ führenden Verzweigungsschnitte nach und nach überschritten werden. Demnach tritt in der That kein Widerspruch ein, sondern es ist immer möglich, eine algebraische Funktion auf einer mehrblättrigen *Riemann*'schen Kugelfläche auch mit Berücksichtigung des unendlich grofsen Werthes von z eindeutig darzustellen.

Zur Erläuterung des Vorstehenden mögen einige Beispiele vorgeführt werden, wobei wir uns in Betreff der Bezeichnungen der Kürze wegen auf die in § 10 und 11 angewendeten beziehen.

1) Die schon betrachtete Funktion

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c}$$

geht durch die Substitution $z = \frac{1}{u}$ in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{1-au}{1-bu}} + \frac{\sqrt{1-cu}}{\sqrt{u}}$$

über, daher ist $u = 0$, und also auch $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt, und zwar hängen, wie man sieht, hier dieselben Blätter zusammen, wie im Punkte c. Man wird daher einen Verzweigungsschnitt von a nach b, und einen zweiten von c nach ∞ ziehen. Man kann aber auch, wie bei der allgemeinen Betrachtung, drei Verzweigungsschnitte von a, b, c nach ∞ gehen lassen. Aus den in dem vierten Beispiele des § 10 angestellten Betrachtungen geht dann hervor, dafs die Übergänge bei diesen Verzweigungsschnitten folgende sind:

$$\text{bei } a\infty \ldots\ldots \frac{1\,2\,3\,4\,5\,6}{2\,3\,1\,5\,6\,4}$$

$$\text{„ } b\infty \ldots\ldots \frac{1\,2\,3\,4\,5\,6}{3\,1\,2\,6\,4\,5}$$

$$\text{„ } c\infty \ldots\ldots \frac{1\,2\,3\,4\,5\,6}{4\,5\,6\,1\,2\,3}.$$

Werden also bei einem einmaligen Umkreisen des Punktes ∞ diese drei Schnitte der Reihe nach überschritten, so kommt man nach und nach aus 1 nach 2, dann nach 1 und schliefslich nach 4, wie es in der That sein mufs.

2) Die Funktion

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{(1-au)(1-bu)}$$

über; daher ist $z = \infty$ kein Verzweigungspunkt, sondern nur die Punkte 0, a und b. Von jedem dieser Punkte kann ein Verzweigungsschnitt ins Unendliche gezogen werden. Nimmt man

aber die Fläche als im Unendlichen geschlossen an, so treffen diese drei Verzweigungsschnitte im Punkte ∞ zusammen (Fig. 17).

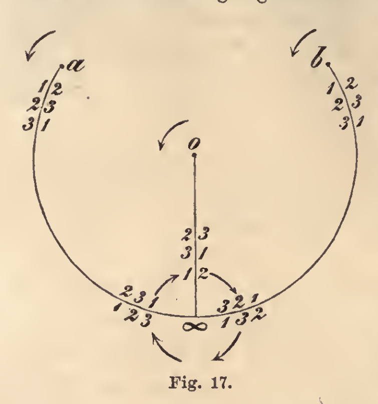


Fig. 17.

Dann gehen über den Theil $a\infty$ hinüber die Blätter in anderer Weise in einander über, wie über den Theil $b\infty$, nämlich so wie die Zahlen in der Figur es andeuten. Um den Verzweigungspunkt 0 in der Richtung der wachsenden Winkel herum geht $f(z)$ in $\frac{f(z)}{\alpha^2} = \alpha f(z)$, also 1 in 2 und daher auch 2 in 3, und 3 in 1 über. Umkreist man nun den Punkt ∞, so geht beim Überschreiten von 0∞, 1 in 2, dann beim Überschreiten von $b\infty$, 2 in 3, und endlich beim Überschreiten von $a\infty$, 3 in 1 über. Hier kommt man also schon nach dem ersten Umlaufe in das erste Blatt zurück, die Funktion ändert ihren Werth nicht, und der Punkt ∞ ist daher wirklich kein Verzweigungspunkt.

Man hätte hier auch die Punkte a und b durch einen in der Endlichkeit verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden können (Fig. 18). Dann mufs es aber auf dieser Linie einen Punkt c geben, wo die Scheidung stattfindet, sodafs über ac hinüber die Blätter in anderer Weise zusammenhängen, als über bc. Legt man dann den zweiten Verzweigungsschnitt von 0 nach c, so bleibt beim Umkreisen des Punktes c die Funktion

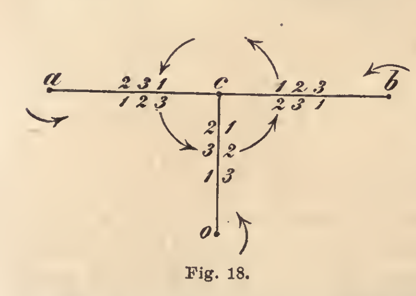


Fig. 18.

ungeändert, sodafs c kein Verzweigungspunkt ist. Man kann hier die Sache in ähnlicher Weise, wie es im 2ten Beispiele des § 10 schon erläutert wurde, so ansehen, als wenn der Punkt c durch das Zusammenfallen dreier Verzweigungspunkte d, e, f entstanden wäre, welche sich gegenseitig aufgehoben haben, sodafs die gegebene Funktion aus der folgenden

$$\sqrt{\frac{z-a}{z-d} \cdot \frac{z-b}{z-e} \cdot \frac{(z-f)^2}{z^2}}$$

dadurch entstanden gedacht wird, daſs $d = e = f = c$ geworden ist.

Man kann hier die Verzweigungsschnitte auch noch auf eine dritte Art wählen, indem man einen solchen von a nach 0, und einen zweiten von 0 nach b zieht.

3) Die Funktion

$$f(z) = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{(1-au)(1-bu)}{u^2}}$$

über, daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt. Man kann hier einen Verzweigungsschnitt von a nach ∞ und einen zweiten von b nach ∞ legen (Fig. 19), und die Blätter so zusammenhängen lassen, wie die Figur andeutet. Ein Umkreisen des Punktes ∞ führt dann zuerst über $b\infty$ von 1 nach 2, und dann über $a\infty$ von 2 nach 3, also bei einem Umlaufe von 1 nach 3, sodaſs die Funktion sich ändert, und $z = \infty$ wirklich als Verzweigungspunkt auftritt. Man bemerke dabei, daſs, wenn die Bewegungsrichtung auch hier die der wachsenden Winkel sein soll, die Umkreisung von ∞ aus gesehen in entgegengesetzter Richtung stattfinden muſs. Denn setzt man

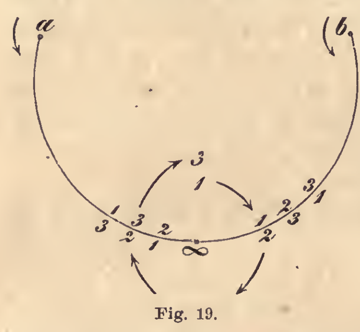


Fig. 19.

$$u = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

so folgt

$$z = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Beschreibt also u einen Kreis um den Nullpunkt mit kleinem Radius und in der Richtung der abnehmenden Winkel, so beschreibt z einen Kreis mit groſsem Radius und in der Richtung der wachsenden Winkel. In diesem Falle geht $\varphi(u)$ bei einem Umlaufe in $\alpha^2\varphi(u)$, also auch $f(z)$ in $\alpha^2 f(z)$ über, d. h. man kommt aus 1 nach 3, wie es die Figur zeigt.

Fig. 20.

Man kann auch hier die Punkte a und b durch einen im Endlichen verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden, darauf einen

Scheidungspunkt c annehmen und von diesem einen zweiten Verzweigungsschnitt nach ∞ ziehen (Fig. 20). Dann ändert sich die Funktion beim Umkreisen des Punktes c nicht.

4) Beachtung verdient auch das früher S. 35 angeführte Beispiel, bei welchem die Funktion w durch die cubische Gleichung

$$w^3 - w + z = 0$$

gegeben ist. Setzt man hier wie oben

$$p = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-z - \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)}, \quad q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-z + \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)},$$

wobei

$$pq = \frac{1}{3} \tag{1}$$

ist, so werden die drei Funktionswerthe ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} w_1 &= p + q \\ w_2 &= \alpha p + \alpha^2 q \\ w_3 &= \alpha^2 p + \alpha q. \end{aligned}$$

Man hat hier zunächst die beiden Verzweigungspunkte $z = +\frac{2}{\sqrt{27}}$ und $z = -\frac{2}{\sqrt{27}}$, bei welchen jedesmal zwei Blätter der Fläche zusammenhängen; sodann aber ist auch $z = \infty$ Verzweigungspunkt, denn setzt man $z = \frac{1}{u}$, so wird

$$p = \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{4u^2}{27}}}{2u}},$$

für $u = 0$ ist also $p = \infty$ und daher wegen (1) $q = 0$. In $z = \infty$ werden demnach alle drei Funktionswerthe unendlich grofs, sodafs hier alle drei Blätter zusammenhängen. Es scheint nun auf den ersten Blick, als wenn die beiden ersten Verzweigungspunkte $\pm\frac{2}{\sqrt{27}}$ sich ganz gleich verhalten müfsten, sodafs in beiden die nämlichen Blätter der Fläche zusammenhängen; das ist jedoch nicht der Fall. Um dies einzusehen braucht man, da die beiden ersten Verzweigungspunkte reell sind, und der Punkt $z = \infty$ auch auf der Hauptaxe angenommen werden kann, nur die reellen Werthe von z zu verfolgen, und man bringe den Ausdruck für

die Wurzeln w auf diejenige Form, die man ihm bei dem irreduktibeln Falle der cubischen Gleichung giebt. Man schreibe also

$$p = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-z - \frac{2}{\sqrt{27}}\sqrt{\frac{27z^2}{4} - 1}\right)}$$

und setze

$$z = \frac{2}{\sqrt{27}} \cos 3v.$$

Dann erhält man

$$p = \sqrt[3]{-\frac{1}{\sqrt{27}}(\cos 3v + i \sin 3v)} = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(\cos v + i \sin v);$$

die drei Werthe von p sind also

$$p = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{iv}, \quad = -\alpha\sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{iv}, \quad = -\alpha^2\sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{iv},$$

und, da immer $q = \frac{1}{3p}$ ist, die entsprechenden von q

$$q = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{-iv}, \quad = -\alpha^2\sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{-iv}, \quad = -\alpha\sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{-iv}.$$

Da aufserdem $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\alpha^2 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$ gesetzt werden kann, so erhält man

$$w_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}(e^{iv} + e^{-iv}),$$

$$w_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(e^{i\left(v + \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(v + \frac{2\pi}{3}\right)}\right),$$

$$w_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(e^{i\left(v - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(v - \frac{2\pi}{3}\right)}\right),$$

oder

$$w_1 = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos v,$$

$$w_2 = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos\left(v + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$w_3 = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos\left(v - \frac{2\pi}{3}\right).$$

So lange v reell bleibt, durchläuft z die reellen Werthe, die numerisch kleiner als $\frac{2}{\sqrt{27}}$ sind, der Punkt z also die Strecke zwischen den beiden einfachen Verzweigungspunkten; für rein imaginäre Werthe von v wird z numerisch gröfser als $\frac{2}{\sqrt{27}}$, und erst für complexe Werthe von v nimmt z imaginäre Werthe an.

Für unseren Zweck kommt es demnach wesentlich auf die reellen Werthe von v an. Dabei ist aber zu beachten, dafs z als eine periodische Funktion von v eingeführt ist. Will man daher etwas Bestimmtes haben, und die Variable z die Strecke zwischen den beiden einfachen Verzweigungspunkten nur einmal durchlaufen lassen, so mufs man eine bestimmte Periode wählen und diese allein betrachten. Nehmen wir also an, damit z die reellen Werthe von $+\frac{2}{\sqrt{27}}$ bis $-\frac{2}{\sqrt{27}}$ durchlaufe, dafs $3v$ sich von 0 bis π, und v daher von 0 bis $\frac{\pi}{3}$ bewege. Man erhält dann die folgenden zusammengehörigen Werthe von v, z, w_1, w_2, w_3:

v	z	w_1	w_2	w_3
0	$+\frac{2}{\sqrt{27}}$	$-2\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\frac{\pi}{6}$	0	-1	$+1$	0
$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{27}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+2\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

Bei der Berechnung derselben mufs man, um bei den Verzweigungspunkten jede Zweideutigkeit zu vermeiden, von dem Werthe $v=\frac{\pi}{6}$ ausgehen und diesen einmal bis 0 abnehmen und dann bis $\frac{\pi}{3}$ wachsen lassen.

Bezeichnet man nun der Kürze wegen die Verzweigungspunkte $+\frac{2}{\sqrt{27}}$ und $-\frac{2}{\sqrt{27}}$ mit e und e', so zeigt sich, dafs der gewählten Periode von v gemäfs in e allerdings die beiden Funktionswerthe w_2 und w_3 zusammenfallen; wenn aber z nach e' gelangt ist, so tritt dies nicht wieder ein, sondern es ist nun w_1 gleich w_3 geworden. Demgemäfs hat man anzunehmen, dafs in e die Blätter 2 und 3, in e' aber die Blätter 1 und 3 zusammenhängen.

Vertheilt man dann der obigen Tabelle gemäfs die drei für $z=0$ stattfindenden Werthe -1, $+1$, 0 von w der Reihe nach auf die Blätter 1, 2, 3, so gehen bei einer Umkreisung des Punktes e die Werthe $+1$ und 0, dagegen bei einer Umkreisung von e'

die Werthe — 1 und 0 in einander über, was auch eine direkte Untersuchung dieser Umkreisungen bestätigt. Zieht man demnach die Verzweigungsschnitte $e\infty$ und $e'\infty$, so hat man beim Überschreiten derselben die Fortsetzung der Blätter wie folgt anzunehmen:

$$\text{bei } e\infty \ldots . \frac{123}{132}$$

$$\text{„ } e'\infty \ldots . \frac{123}{321}.$$

Dann hängen im Punkte ∞ alle drei Blätter zusammen, in die man nach und nach gelangt, wenn man diesen Punkt umkreist.

§ 15.

Bedeutet w eine mehrdeutige Funktion von z, W aber eine rationale Funktion von w und z (oder auch von w allein), so ist die z-Fläche für die Funktion W ebenso beschaffen, wie für die Funktion w. Denn bezeichnet man mit $w_\varkappa$ und w_λ irgend zwei demselben z zugehörige Werthe von w, mit $W_\varkappa$ und W_λ die entsprechenden Werthe von W, so mufs $W_\varkappa$ in W_λ übergehen, so oft $w_\varkappa$ in w_λ übergeht, weil jedem Werthepaare von z und w nur ein einziger Werth von W entspricht. Die Übergänge der W-Werthe hängen daher in derselben Weise von den von z durchlaufenen Umkreisungen ab, wie die w-Werthe. Daher hat die z-Fläche für W dieselben Verzweigungspunkte und Verzweigungsschnitte wie für w, und in jedem Verzweigungspunkte hängen auch die nämlichen Blätter zusammen. Aus diesem Grunde nennt *Riemann* alle rationalen Funktionen von w und z ein System gleichverzweigter Funktionen.

Vierter Abschnitt.

Integrale mit complexen Variablen.

§ 16.

Man kann das bestimmte Integral von einer Funktion einer complexen Veränderlichen genau in derselben Weise definiren, wie dies bei reellen Variablen geschieht.

Es seien z_0 und z irgend zwei complexe Werthe der Variablen z. Man denke sich die Punkte, welche diese beiden Werthe repräsentiren, durch eine beliebige ununterbrochene Linie ver-

bunden und nehme auf derselben eine Reihe eingeschalteter Punkte an, welche den Werthen $z_1, z_2, \cdots z_n$ der Variablen entsprechen. Ist ferner $f(z)$ eine Funktion von z, welche in keinem Punkte der obigen Linie unendlich grofs wird, und bildet man die Summe der Produkte

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \cdots\cdots + f(z_n)(z - z_n),$$

so ist der Grenzwerth derselben, wenn die Anzahl der zwischen z_0 und z längs der beliebigen Linie eingeschalteten Werthe ins Unendliche zunimmt, die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. also ins Unendliche abnehmen, das bestimmte Integral zwischen den Grenzen z_0 und z, also

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim\,[f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \cdots\cdots + f(z_n)(z - z_n)]. \tag{1}$$

Man sieht, dafs diese Definition von der gewöhnlich bei reellen Variablen gegebenen in nichts Wesentlichem verschieden ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dafs, wie es die Natur einer complexen Veränderlichen erfordert, der Weg, den dieselbe zwischen der unteren und der oberen Grenze durchläuft, d. h. die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, nicht vorgeschrieben ist, sondern durch jede ununterbrochene Linie gebildet werden kann. Von dieser Linie, welche der I n t e g r a t i o n s w e g genannt wird, ist das Integral durchaus abhängig.

Es ist leicht zu zeigen, dafs, wenn $f(z)$ in keinem Punkte eines Integrationsweges unendlich grofs wird, auch das auf diesem Wege genommene Integral einen endlichen Werth hat. Da nämlich (nach § 2. 1) der Modul einer Summe kleiner ist, als die Summe der Moduln der einzelnen Glieder, so folgt aus (1)

$$\mathrm{mod}\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz < \lim\Big\{\mathrm{mod}\Big[f(z_0)(z_1-z_0)\Big] + \mathrm{mod}\Big[f(z_1)(z_2-z_1)\Big] + \cdots + \mathrm{mod}\Big[f(z_n)(z-z_n)\Big]\Big\}.$$

Bedeutet aber M den gröfsten unter den Werthen, die der Modul von $f(z)$ annimmt, während z den Integrationsweg durchläuft, ein Werth, der der Annahme nach endlich ist, so wird die rechte Seite noch mehr vergröfsert, wenn man M an Stelle der Moduln der einzelnen Funktionswerthe $f(z_0)$, $f(z_1) \cdots\cdot$ treten läfst. Demnach erhält man, da der Modul eines Produktes gleich dem Produkte aus den Moduln der Faktoren ist (§ 2. 3),

$$\operatorname{mod} \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz < M . \lim \left\{ \operatorname{mod}(z_1 - z_0) + \operatorname{mod}(z_2 - z_1) + \cdots \right.$$
$$\left. + \operatorname{mod}(z - z_n) \right\} .$$

Darin stellen die Moduln der Differenzen $z_1 - z_0, z_2 - z_1, \cdots$ die Längen der Sehnen $\overline{z_0 z_1}, \overline{z_1 z_2}, \cdots$ dar. Beim Übergange zur Grenze geht also die Summe dieser Moduln in die Länge L des Integrationsweges über, mithin ist

$$\operatorname{mod} \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz < ML$$

und hat einen endlichen Werth, sofern der Integrationsweg eine endliche Länge besitzt*).

Aus der Definition folgen unmittelbar folgende zwei Sätze:

1) Bedeutet z_k irgend einen der von der Variablen durchlaufenen Werthe, so ist

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_k} f(z)\, dz + \int_{z_k}^{z} f(z)\, dz.$$

2) Es ist

$$\int_{z}^{z_0} f(z)\, dz = - \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

d. h. durchläuft die Variable die Linie, welche die stetige Aufeinanderfolge ihrer Werthe darstellt, in umgekehrter Richtung, so erhält das Integral den entgegengesetzten Werth.

Man kann ferner zeigen, dafs, wie auch immer der Integrationsweg beschaffen sein mag, das Integral

$$w = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

stets eine Funktion der oberen Grenze z ist, wenn die untere z_0 constant angenommen wird. Denn setzt man

$$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad z = x + iy,$$
$$\zeta = \xi + i\eta,$$

so hat man

*) *Königsberger*, Vorlesungen über die Theorie der ellipt. Funkt. I. S. 63.

$$w = \int_{x_0 + iy_0}^{x + iy} f(\xi + i\eta)\,(d\xi + i d\eta).$$

Dieses Integral zerfällt in zwei Theile, so dafs in dem ersten ξ, in dem zweiten η die Integrationsvariable ist. Liegt nun ein bestimmter Integrationsweg vor, so ist vermöge desselben η eine Funktion von ξ, und ξ eine Funktion von η; sei etwa

$$\eta = \varphi(\xi), \qquad \xi = \psi(\eta);$$

führt man diese ein, so wird nun, da ξ alle Werthe von x_0 bis x, und gleichzeitig η die den ξ vermöge des Integrationsweges zugehörigen Werthe von y_0 bis y durchläuft,

$$w = \int_{x_0}^{x} f[\xi + i\varphi(\xi)]\,d\xi + i\int_{y_0}^{y} f[\psi(\eta) + i\eta)\,d\eta,\text{*)}$$

und diese Gleichung gilt, welches auch die den Integrationsweg bestimmenden Funktionen φ und ψ sein mögen. Bringt man darin auch f auf die Form einer complexen Gröfse, so wird man auf lauter reelle Integrale geführt, und dann folgt unmittelbar, dafs man auf die vorigen die bei reellen Integralen gültigen Differentiationsregeln anwenden kann. Man erhält also

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f[x + i\varphi(x)] = f(x + iy)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = if[\psi(y) + iy] = if(x + iy).$$

Demnach ist

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x},$$

also (nach § 5) w eine Funktion von z. Aus dem zweiten der oben angeführten Sätze ergiebt sich dann, dafs w auch als Funktion der unteren Grenze betrachtet werden kann, wenn die obere als constant angesehen wird. Da ferner (§ 5) $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$ ist, so folgt auch

$$\frac{dw}{dz} = f(z).$$

*) Es folgt dies auch aus der Summe (1), durch welche das Integral definirt wird, wenn man in derselben die complexen Gröfsen in ihre Bestandtheile zerlegt.

Dagegen darf der bei reellen Integralen gültige Satz, dafs, wenn $F(z)$ eine Funktion bedeutet, deren Derivirte $= f(z)$ ist,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = F(z) - F(z_0)$$

gesetzt werden kann, nicht ohne Weiteres auf complexe Integrale übertragen werden, denn, wie schon bemerkt, hängt der Werth eines solchen nicht blofs von der oberen und unteren Grenze, sondern auch von der ganzen Reihe der dazwischen liegenden Werthe, d. h. von dem Integrationswege ab.

§ 17.

Um nun den Einflufs zu untersuchen, den der Integrationsweg auf den Werth des Integrales hat, beginnen wir mit folgender Betrachtung. Es sei

$$z = x + iy$$

die Variable, also x und y die rechtwinkligen Coordinaten des darstellenden Punktes. Hat man nun ein auf irgend eine Weise bestimmt begrenztes Flächenstück, welches aus einem oder auch aus mehreren Blättern bestehen kann, und bedeuten P und Q zwei reelle innerhalb des Flächenstückes überall endliche und stetige Funktionen von x und y, so soll zunächst bewiesen werden, dafs das auf das ganze Flächenstück ausgedehnte Flächenintegral

$$J = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

dem über die ganze Begrenzung des Flächenstücks erstreckten Linienintegral

$$\int (P dx + Q dy)$$

gleich ist.

Wir werden diesen Satz nicht blofs für den einfachsten Fall beweisen, dafs das Flächenstück nur aus einem einzigen Blatte besteht und von einer einzigen einfach in sich zurücklaufenden Linie begrenzt wird, sondern wir wollen auch gleich die Fälle mit berücksichtigen, in welchen die Begrenzung aus mehreren abgesonderten geschlossenen Linien besteht, die entweder ganz aufser einander liegen können, oder von denen eine oder mehrere von einer anderen ganz umschlossen werden; endlich wollen wir auch den Fall nicht ausschliefsen, dafs das Flächenstück aus mehreren Blättern besteht, welche über die Verzweigungsschnitte hinüber in ein-

ander übergehen. Alsdann werden wir jedoch annehmen, dafs das Flächenstück keine Verzweigungspunkte enthält, in denen die Funktionen P und Q unendlich oder unstetig werden. Es mufs nun aber, um alle diese Fälle zu umfassen, etwas Bestimmtes über den Sinn der Begrenzungsrichtung festgesetzt werden. Wenn wir, wie es üblich ist, annehmen, dafs die positiven Richtungen der x- und y-Axe so liegen, dafs ein im Nullpunkte stehender und nach der positiven Richtung der x-Axe hinblickender Beobachter die positive y-Axe zu seiner Linken sieht, so wollen wir die positive Begrenzungsrichtung so annehmen, dafs jemand, der dieselbe in dieser Richung durchläuft, das begrenzte Flächenstück stets an der linken Seite hat. Man kann dies auch so ausdrücken: In jedem Punkte der Begrenzung liegt die in das Innere des Flächenstückes gezogene Normale zur positiven Begrenzungsrichtung so, wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe. Besteht z. B. die Begrenzung aus einer äufseren geschlossenen Linie und einem ganz innerhalb derselben liegenden Kreise, so dafs die innerhalb dieses Kreises liegenden Punkte sich aufserhalb des begrenzten Flächenstücks befinden, so ist bei der äufseren Linie die positive Begrenzungsrichtung die der wachsenden Winkel, bei dem kleinen Kreise dagegen die entgegengesetzte, wie es die Pfeile in Fig. 21 andeuten. Bei dem Linienintegrale nun, von welchem wir beweisen wollen, dafs es dem angegebenen Flächenintegrale gleich ist, mufs die Integration über die ganze Begrenzung in der eben erläuterten positiven Richtung erstreckt werden.

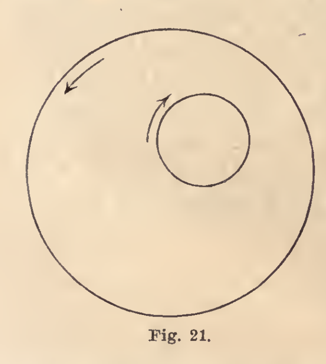


Fig. 21.

Wir schreiben das Integral J in der Form

$$J = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy,$$

und können dann in dem ersten Theile die Integration nach x, im zweiten Theile die nach y ausführen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir für das erste Integral das Flächenstück in Elementarstreifen, welche durch einander unendlich nahe liegende, der x-Axe parallel laufende Gerade gebildet werden, und im Falle Verzweigungspunkte vorhanden sind, tragen wir Sorge, dafs durch jeden derselben eine solche Gerade hindurch gehe. Dadurch zerfällt das ganze

Flächenstück in unendlich schmale trapezförmige Streifen. In Fig. 22 sind z. B. bei einer aus 2 Blättern bestehenden Fläche, welche durch eine einen Verzweigungspunkt zweimal umgebende geschlossene Linie begrenzt ist, mehrere solcher trapezförmigen Stücke dargestellt, wobei die im zweiten Blatte verlaufenden Linien punktirt sind. Hebt man nun irgend einen, einem beliebigen Werthe von y angehörigen, dieser Elementarstreifen heraus, d. h. wenn die Fläche aus mehreren Blättern besteht, alle diejenigen in den verschiedenen Blättern unmittelbar über einander liegenden Elementarstreifen, die demselben Werthe von y angehören, und bezeichnet die Werthe, welche die Funktion Q an denjenigen Stellen besitzt, wo der Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, von links nach rechts gerechnet (d. h. in der Richtung der positiven x-Axe) an den Eintrittsstellen mit

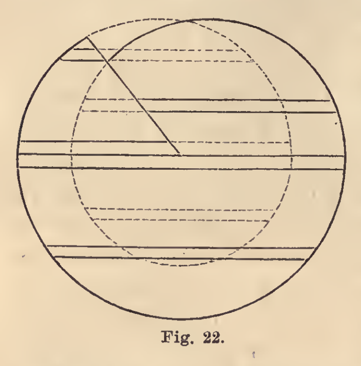


Fig. 22.

$$Q_1, \; Q_2, \; Q_3 \cdots$$

und an den Austrittsstellen mit

$$Q', \; Q'', \; Q''', \cdots$$

so ist (Fig. 23)

$$\int \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx = - Q_1 + Q' - Q_2 + Q'' - \cdots\cdot,*)$$

*) Man bemerke, dafs diese Gleichung auch dann noch richtig bleibt, wenn $\frac{\partial Q}{\partial x}$ an irgend einer Stelle, über die sich die Integration erstreckt, unendlich oder unstetig wird, wenn nur Q an dieser Stelle keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Ist nämlich $f(x)$ eine Funktion der reellen Variablen x, welche an einer Stelle $x = a$ stetig ist, während ihr Differentialquotient $f'(x)$ an dieser Stelle eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so nehme man zu beiden Seiten von a zwei unendlich nahe an a liegende Werthe x_h und x_k an. Liegt dann in dem Integrale

$$\int\limits_{x}^{x_1} f'(x) \, dx$$

a zwischen den Grenzen x_0 und x_1, und bleibt $f(x)$ zwischen denselben stetig, während $f'(x)$ nur an der Stelle $x = a$ unstetig ist, so kann man setzen

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f'(x) \, dx = \lim \left[\int\limits_{x_0}^{x_h} f'(x) \, dx + \int\limits_{x_k}^{x_1} f'(x) \, dx \right],$$

also

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int - Q_1 dy + \int Q' dy + \int - Q_2 dy + \cdots\cdots$$

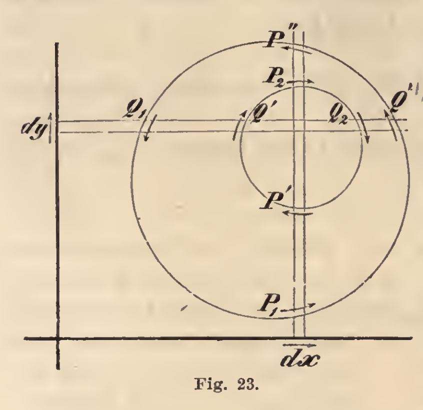


Fig. 23.

In den Integralen rechter Hand durchläuft y alle Werthe vom kleinsten bis zum gröfsten, dy ist also immer positiv zu nehmen. Bezeichnet man aber die Projektionen der durch die Elementarstreifen aus der Begrenzung herausgeschnittenen Bogenelemente auf die y-Axe, in derselben Reihenfolge wie oben genommen, an den Eintrittsstellen durch

$$dy_1,\ dy_2,\ dy_3 \cdots\cdots,$$

und an den Austrittsstellen durch

$$dy',\ dy'',\ dy''' \cdots\cdots$$

und nimmt auf die positive Begrenzungsrichtung Rücksicht, so ist (Fig. 23)

$$\begin{aligned} dy &= -dy_1 = -dy_2 = -dy_3 = \cdots\cdots \\ &= +dy' = +dy'' = +dy''' = \cdots\cdots, \end{aligned}$$

folglich

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int Q_1 dy_1 + \int Q' dy' + \int Q_2 dy_2 + \cdots\cdots$$

---

wo der Grenzübergang sich auf das Zusammenfallen von x_h und x_k mit a bezieht. Da nun $f'(x)$ von x_0 bis x_h und von x_k bis x_1 stetig ist, so folgt

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = \lim\, [f(x_h) - f(x_0) + f(x_1) - f(x_k)],$$

und da $f(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig ist, also beim Übergange zur Grenze $f(x_h)$ und $f(x_k)$ einander gleich werden, oder

$$\lim\, [f(x_h) - f(x_k)] = 0$$

ist, so hat man trotz der Stetigkeitsunterbrechung von $f'(x)$ zwischen den Grenzen des Integrals doch

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = f(x_1) - f(x_0).$$

Dieser Fall ist hier mit zu berücksichtigen, da sich später zeigen wird, dafs die Derivirten stetiger Funktionen in den Verzweigungspunkten unendlich grofs werden können (§ 39).

In allen diesen Integralen verändert sich y im Sinne der positiven Begrenzungsrichtung, daher vereinigen sich alle zu einem einzigen, und man erhält

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy = \int Q\,dy,$$

wenn das letztere Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt wird.

Ebenso kann man nun auch das zweite Integral

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy$$

behandeln. Hier zerlegt man das Flächenstück in Elementarstreifen durch gerade Linien, welche der y-Axe parallel laufen und läfst durch jeden Verzweigungspunkt eine solche Gerade hindurchgehen. Bezeichnet man dann die Werthe, welche die Funktion P an den Stellen hat, wo ein Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, diese Werthe der Reihe nach von unten nach oben (nämlich in der Richtung der positiven y-Axe) gerechnet, an den Eintrittsstellen mit

$$P_1,\ P_2,\ P_3 \cdots\cdots$$

und an den Austrittsstellen mit

$$P',\ P'',\ P''' \cdots\cdots,$$

so ist wieder

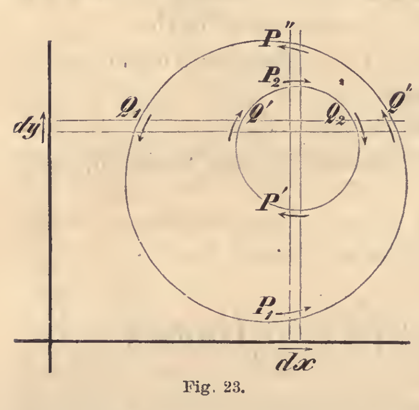


Fig. 23.

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\int P_1\,dx + \int P'\,dx - \int P_2\,dx + \cdots\cdots,$$

und darin ist dx positiv. Bezeichnen aber

$$dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ \cdots \text{ und } dx',\ dx'',\ dx''',\ \cdots$$

die Projectionen der herausgeschnittenen Bogenelemente, so ist mit Berücksichtigung der positiven Begrenzungsrichtung

$$dx = +\,dx_1 = +\,dx_2 = +\,dx_3 = \cdots\cdots$$
$$= -\,dx' = -\,dx'' = -\,dx''' = \cdots\cdots$$

und daher

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\int P_1\,dx_1 - \int P'\,dx' - \int P_2\,dx_2 - \cdots\cdots,$$
$$= -\int P\,dx,$$

worin wieder das Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung auszudehnen ist. Setzt man nun beide Integrale zusammen, so folgt, was zu beweisen war,

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int(P\,dx+Q\,dy),$$

das Linienintegral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt.

Dieser hiedurch für reelle Funktionen P und Q bewiesene Satz kann sofort für den Fall erweitert werden, dafs P und Q complexe Funktionen der reellen Variablen x und y sind. Nämlich setzt man

$$P=P'+iP'' \qquad\qquad Q=Q'+iQ'',$$

worin P', P'', Q', Q'' reelle Funktionen von x und y bedeuten, so ist

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{\partial Q'}{\partial x}-\frac{\partial P'}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$+\,i\iint\left(\frac{\partial Q''}{\partial x}-\frac{\partial P''}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

und wenn man den Satz auf die reellen Theile der rechten Seite anwendet,

$$=\int(P'\,dx+Q'\,dy)+i\int(P''\,dx+Q''\,dy)$$

$$=\int(P\,dx+Q\,dy).$$

Wir haben bisher angenommen, dafs innerhalb des betrachteten Flächentheils keine Verzweigungspunkte oder andere Punkte liegen, in denen P oder Q unstetig ist. Um nun auch solche Flächentheile, bei denen dies der Fall ist, mit in die Betrachtung hineinziehen zu können, haben wir nur nöthig, solche Punkte mit beliebig kleinen (wirklich) geschlossenen Linien zu umgeben und dadurch auszuschliefsen, wobei dann diese Linien mit zu der Begrenzung des Flächentheils gehören.

§ 18.

Aus dem vorigen Satze folgt sogleich der folgende: **Wenn $P\,dx+Q\,dy$ ein vollständiges Differential ist, so ist das Integral $\int(P\,dx+Q\,dy)$ ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks, innerhalb dessen P und Q endlich und stetig sind, gleich Null.** (I.) Denn wenn $P\,dx+Q\,dy$ ein vollständiges Differential ist, so ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

also verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, welches dem Linienintegrale gleich ist, und folglich ist dieses wie jenes gleich Null.

Wenn nun

$$w = f(z)$$

eine Funktion einer complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist [§ 5. (1)]

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial (iw)}{\partial x},$$

folglich

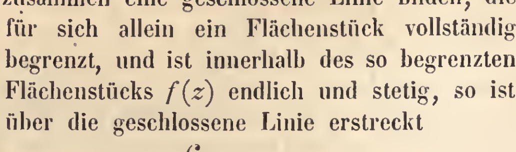
$$w\,dx + iw\,dy \quad \text{d. h.} \quad w\,(dx + i\,dy) \quad \text{oder } w\,dz$$

ein vollständiges Differential, und daher

$$\int f(z)\,dz = 0,$$

II. wenn dieses Integral über die ganze Begrenzung eines Flächenstücks ausgedehnt wird, innerhalb dessen $f(z)$ endlich und stetig ist.

Hieraus folgt weiter: Läfst man die Veränderliche z zwischen zwei Punkten a und b zwei verschiedene Wege acb und adb (Fig. 24) durchlaufen, welche zusammen eine geschlossene Linie bilden, die für sich allein ein Flächenstück vollständig begrenzt, und ist innerhalb des so begrenzten Flächenstücks $f(z)$ endlich und stetig, so ist über die geschlossene Linie erstreckt



$$\int f(z)\,dz = 0.$$

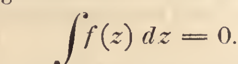


Fig. 24.

Um ein auf einem bestimmten Wege genommenes Integral kurz zu bezeichnen, wählen wir den Buchstaben J und fügen demselben den Integrationsweg in Klammern hinzu, sodafs z. B. das auf dem Wege acb genommene Integral $\int f(z)\,dz$ durch $J(acb)$ angedeutet wird. Dann kann man die letzte Gleichung schreiben

$$J(acbda) = 0.$$

Nun ist aber (§ 16)

$$J(acbda) = J(acb) + J(bda)$$

und

$$J(bda) = -J(adb),$$

also folgt

$$J(acb) = J(adb).$$

Das Integral $\int f(z)\,dz$ hat also auf zwei verschiedenen, dieselben Punkte verbindenden Wegen immer denselben Werth, wenn die beiden Wege zusammengenommen ein Flächenstück vollständig begrenzen, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. } III.

Hat man nun ein zusammenhängendes Flächenstück, in welchem $f(z)$ endlich und stetig bleibt, von der Beschaffenheit, dafs jede darin gezogene (wirklich) geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bildet, so hat das Integral $\int f(z)\,dz$ auf allen Wegen zwischen denselben zwei Punkten denselben Werth. Läfst man die untere Grenze z_0 constant sein, so ist also innerhalb eines solchen Flächenstückes das Integral eine eindeutige Funktion der oberen Grenze, und bezeichnet $F(z)$ eine Funktion, deren Derivirte $= f(z)$, so ist innerhalb jenes Flächenstücks $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0)$, da in diesem Falle der Werth des Integrals von dem Integrationswege unabhängig ist.

Es tritt hier die grofse Bedeutung hervor, welche solchen Flächen zukommt, in denen jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bildet. *Riemann* hat die Flächen von dieser Beschaffenheit mit dem Namen **einfach zusammenhängende Flächen** bezeichnet. Eine solche ist z. B. eine Kreisfläche. Ist in einer solchen $f(z)$ überall stetig, so ist, wie bemerkt, $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ in derselben eine eindeutige Funktion der oberen Grenze. Wenn dagegen $f(z)$ in einer Kreisfläche unendlich grofs wird, z. B. nur in einem Punkte a, und umgiebt man diesen, um ein Flächenstück zu erhalten, in welchem $f(z)$ stetig bleibt, mit einem kleinen

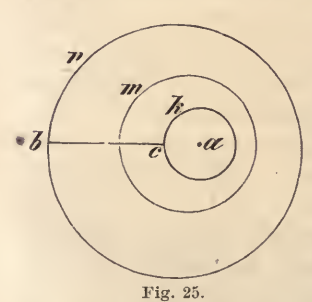


Fig. 25.

Kreise k, und schliefst den Punkt a dadurch aus, so ist die so entstehende ringförmige Fläche (Fig. 25) nicht mehr einfach zusammenhängend; denn eine Linie m, welche den kleinen Kreis k ganz umschliefst, bildet für sich allein noch nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst m und k zusammen. Demnach hat zwar das auf m und k zugleich erstreckte Integral den Werth Null, wenn aber das auf k allein ausgedehnte Integral

nicht gleich Null ist, so kann auch das längs m genommene nicht Null sein. Innerhalb einer solchen Fläche, welche *Riemann* mehrfach zusammenhängend nennt, kann daher die Abhängigkeit des Integrals von dem Integrationswege bestehen bleiben, und dann das Integral eine vieldeutige Funktion der oberen Grenze sein*).

§ 19.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, dafs die Funktion $f(z)$ in dem zu betrachtenden Flächenstücke überall stetig sei, fallen und gehen zur Untersuchung von Integralen über, deren Integrationswege Flächentheile begrenzen, in denen die Funktion nicht mehr überall stetig ist.

Wenn $f(z)$ in irgend einem Punkte eines Flächenstückes unendlich oder unstetig ist, so soll ein solcher Punkt ein Unstetigkeitspunkt genannt werden. Er kann zugleich ein Verzweigungspunkt sein oder auch nicht. Giebt es nun in einem Flächenstücke Unstetigkeitspunkte, so ist man nicht mehr in allen Fällen berechtigt zu schliefsen, dafs das über die ganze Begrenzung des Flächenstücks ausgedehnte Integral den Werth Null habe, weil der Beweis dieses Satzes wesentlich auf der Voraussetzung beruht, dafs $f(z)$ innerhalb des Flächenstückes nicht unstetig wird. Aber man kann zeigen, dafs, welchen Werth das Integral auch haben mag, es seinen Werth nicht ändert, wenn man das Flächenstück um beliebige Stücke vergröfsert oder verkleinert, wenn nur $f(z)$ innerhalb der hinzugekommenen oder ausgeschiedenen Flächentheile endlich und stetig ist. (IV.) Denn wird erstlich ein hinzukommendes oder ausgeschiedenes Flächenstück selbst von einer Linie vollständig begrenzt, wie z. B. A oder B (Fig. 26, wo $abcda$ die ursprüngliche Begrenzung sei), so ist, wenn $f(z)$ innerhalb A und B stetig ist, das auf die Begrenzung von A oder B erstreckte Integral gleich Null; es kann daher die Begrenzung von A oder B beliebig der ursprünglichen Begrenzung hinzugefügt werden, ohne dafs der Werth des Integrals sich ändert.

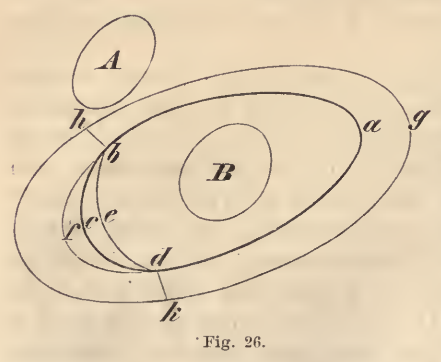


Fig. 26.

*) Siehe Abschnitt IX und X.

Wird aber das hinzugekommene oder ausgeschiedene Flächenstück zum Theil von der ursprünglichen Begrenzung mit begrenzt, wie $bfdcb$ oder $bcdeb$, so ist

$$J(bfd) = J(bcd) = J(bed),$$

wenn $f(z)$ innerhalb jener Flächentheile stetig ist. Daher kann der Begrenzungstheil bcd beliebig durch bfd oder bed ersetzt werden, ohne dafs das Integral seinen Werth ändert. Hieraus folgt weiter, dafs man auch eine geschlossene Linie, welche entweder allein die Begrenzung eines Flächentheils bildet oder doch zu den Begrenzungsstücken eines solchen gehört, durch eine beliebige weitere oder engere geschlossene Linie ersetzen kann, wenn nur dadurch keine Flächentheile ein- oder austreten, in denen $f(z)$ unendlich oder unstetig wird, denn um z. B. $abcda$ in $ghkg$ zu erweitern, braucht man nur zuerst bcd durch $bhkd$ und dann $kdabh$ durch kgh zu ersetzen. In ähnlicher Weise läfst sich die Richtigkeit des Satzes in allen Fällen darthun. Ganz allgemein aber, auch für Flächenstücke, die aus mehreren Blättern bestehen oder Lücken enthalten, kann er so bewiesen werden. Wird eine beliebige Fläche T so in zwei Theile M und N getheilt, dafs $f(z)$ in M stetig ist, und bezeichnet man das über die Begrenzung eines Theiles, z. B. M erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ durch $J(M)$, so ist

$$J(M) = 0.$$

Haben nun die Theile M und N keine gemeinschaftlichen Begrenzungsstücke, so bilden die Begrenzungen von M und N zusammen die Begrenzung von T und daher ist

$$J(T) = J(M) + J(N),$$

und folglich auch

$$J(T) = J(N).$$

Gehören dagegen gewisse Linien C sowohl zur Begrenzung von M, als auch zu der von N, so liegen die Flächentheile M und N auf verschiedenen Seiten dieser Linien C. Durchläuft man also die Begrenzungen von M und N hinter einander in der positiven Begrenzungsrichtung, d. h. so, dafs der begrenzte Flächentheil jedesmal zur linken Hand liegt, so werden die Linien C zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die längs C genommenen Integrale heben sich daher auf; die übrigen Begrenzungstheile von M und N aber bilden die ganze Begrenzung von T, und daher hat man wieder

$$J(T) = J(M) + J(N)$$

und folglich

$$J(T) = J(N).$$

Da nun hienach der Theil M aus der Fläche T ausgeschieden werden kann, so kann auch umgekehrt eine Fläche N durch Hinzufügung einer Fläche M, in welcher die Funktion stetig bleibt, erweitert werden, ohne dafs das Begrenzungsintegral sich ändert.

Hierauf stützt sich nun ein anderer wichtiger Satz. Bildet eine geschlossene Linie (I) für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und wird die Funktion $f(z)$ innerhalb desselben in den Punkten a_1, a_2, $a_3 \cdots$ unstetig, so umgebe man jeden einzelnen dieser Punkte mit einer beliebig kleinen geschlossenen Linie, z. B. mit einem kleinen Kreise, der aber, wenn einer dieser Unstetigkeitspunkte zugleich ein Verzweigungspunkt ist, so viele Male durchlaufen werden mufs, als Blätter in letzterem zusammenhängen. Alsdann bilden alle diese Kreise, die mit (A_1), (A_2), (A_3), $\cdots$ bezeichnet werden mögen, mit der äufseren Linie (I) zusammen die Begrenzung eines Flächenstückes, in welchem $f(z)$ stetig ist. (Fig. 27, wo die punktirten Linien im zweiten Blatte verlaufen.) Folglich ist das auf diese ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckte Integral $\int f(z)\, dz$ gleich Null. Wird nun aber die äufsere Linie (I) in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen, so müssen die kleinen Kreise (A_1), (A_2), (A_3), $\cdots$ in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden. Bezeichnet man daher die auf die Linien (I), (A_1), (A_2), (A_3), $\cdots$ in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckten Integrale $\int f(z)\, dz$ resp. mit I, A_1, A_2, A_3, $\cdots$, so ist

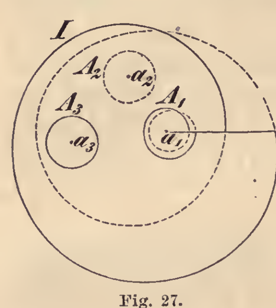


Fig. 27.

$$I - A_1 - A_2 - A_3 - \cdots = 0$$

und folglich

$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$$

Befindet sich nun die Linie (I) in einem Flächenstücke T, welches keine anderen Unstetigkeitspunkte enthält, als die von ihr umschlossenen a_1, a_2, a_3, $\cdots$, so behält das Integral I nach dem vorigen Satze seinen Werth, wenn es auf die Begrenzung von T

ausgedehnt wird, und daher erhalten wir den Satz: **Das Integral $\int f(z)\, dz$, ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks T, ist gleich der Summe der Integrale längs kleiner geschlossener Linien, welche die sämmtlichen innerhalb T befindlichen Unstetigkeitspunkte einzeln umgeben, alle Integrale in derselben Richtung genommen.** V.

§ 20.

Durch die vorige Betrachtung sind wir nun auf die Untersuchung solcher geschlossener Integrationswege geführt worden, welche nur einen einzigen Unstetigkeitspunkt umgeben. Dabei müssen wir aber unterscheiden, ob der Unstetigkeitspunkt zugleich ein Verzweigungspunkt ist, oder nicht. Betrachten wir zuerst einen Punkt a, welcher nicht Verzweigungspunkt ist, und in welchem $f(z)$ unendlich grofs wird. Nimmt man das Integral

$$A = \int f(z)\, dz$$

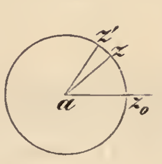
längs einer diesen Unstetigkeitspunkt umgebenden Linie, welche weder einen andern Unstetigkeitspunkt, noch auch einen Verzweigungspunkt einschliefst, so kann diese durch einen kleinen Kreis um den Punkt a mit dem Radius r ersetzt werden, welchen man auch ins Unendliche abnehmen lassen kann, ohne dafs der Werth des Integrals sich ändert. Schreibt man dann

$$A = \int (z-a) f(z) \frac{dz}{z-a}$$

und setzt

$$z - a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so bleibt, wenn z den kleinen Kreis durchläuft, r constant, und φ wächst von 0 bis 2π. Dabei wird angenommen, dafs der Punkt z seine Bewegung aus dem Punkte z_0 beginne, in welchem eine aus a mit der positiven Hauptaxe parallel gezogene Gerade den Kreis durchschneidet (Fig. 28). Dies ist gestattet, da der Anfangspunkt der Bewegung willkürlich gewählt werden kann. Um nun $\frac{dz}{z-a}$ durch r und φ auszudrücken, bemerke man mit *Riemann*,



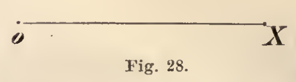


Fig. 28.

dafs dz einen von einem beliebigen Punkte z der Peripherie des Kreises ausgehenden unendlich kleinen Kreisbogen bedeutet, dessen Centriwinkel $= d\varphi$ ist. Bezeichnet man den Endpunkt dieses unendlich kleinen Kreisbogens mit z', so ist

$$dz = z' - z \quad , \quad \frac{dz}{z-a} = \frac{z'-z}{z-a}.$$

Nun ist aber § 2. S. 18 gezeigt worden, dafs

$$\frac{z'-z}{z-a} = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}} (-\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

ist, wo α den Winkel azz' bedeutet. Dieser ist in unserem Falle ein Rechter, also

$$\frac{dz}{z-a} = i \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}.$$

Die Linie $\overline{zz'}$ ist ein Kreisbogen mit dem Centriwinkel $d\varphi$, also $= r d\varphi$, $\overline{az}$ der Radius, also $= r$, folglich erhält man

$$\frac{dz}{z-a} = i \frac{r d\varphi}{r} = i d\varphi.\text{*)}$$

Setzt man dies ein, so folgt

$$A = \int_0^{2\pi} (z-a) f(z)\, i\, d\varphi.$$

Läfst man jetzt den Radius r des Kreises ins Unendliche abnehmen, so nähern sich die Punkte z der Peripherie des Kreises dem Punkte a, $z-a$ also der Null, während $f(z)$ unendlich grofs wird. Wenn nun der Fall eintritt, dafs $f(z)$ für $z = a$ so unendlich wird, dafs das Produkt $(z-a) f(z)$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwerthe p nähert, also

$$[\lim (z-a) f(z)]_{z=a} = p$$

ist, wobei aber ausdrücklich vorausgesetzt wird, dafs dieser Grenzwerth immer derselbe sei, von welcher Seite her der Punkt z dem

*) Man erhält auch direct aus

$$z - a = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

durch Differentiation, bei welcher r als Radius des Kreises constant bleibt,

$$dz = r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi$$
$$= ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, d\varphi,$$

also

$$\frac{dz}{z-a} = i d\varphi.$$

Punkte a auch immer sich nähern möge, so kann man für alle in der Nähe des Punktes a befindlichen Punkte z annehmen, daſs

$$(z-a)f(z)=p+\varepsilon$$

ist, worin ε eine Funktion von r und φ bedeutet, welche für jeden Werth von φ mit r zugleich unendlich klein wird. Man erhält dadurch

$$A=p\int_0^{2\pi} i\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\varepsilon\, i\,d\varphi.$$

Läſst man nun r und also auch ε bis zum Verschwinden abnehmen, so verschwindet auch das zweite Integral, und es folgt

$$A=2\pi ip.$$

Dadurch ist der Werth des Integrals durch den Grenzwerth von $(z-a)f(z)$ ausgedrückt, wenn derselbe ein endlicher und bestimmter ist. Dieser Werth von A ändert sich nach IV nicht, wenn die Integration auf die vollständige Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt wird, innerhalb dessen keine Unstetigkeitspunkte auſser a sich befinden.

Als Beispiel diene

$$\int\frac{dz}{1+z^2}.$$

Hier ist

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)},$$

welches für $z=i$ unendlich wird, ohne daſs dieser Punkt ein Verzweigungspunkt ist (die Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ hat überhaupt keine Verzweigungspunkte). Ferner ist

$$p=\left[\lim\frac{z-i}{1+z^2}\right]_{z=i}=\left[\lim\frac{1}{z+i}\right]_{z=i}=\frac{1}{2i},$$

also

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\pi,$$

das Integral auf eine den Punkt i umgebende geschlossene Linie in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt.

Liegen nun in einem Flächenstücke T die Unstetigkeitspunkte a_1, a_2, a_3, etc., die aber nicht zugleich Verzweigungspunkte sein dürfen, und wird $f(z)$ in diesen Punkten so unendlich, daſs die

Produkte $(z - a_1) f(z)$, $(z - a_2) f(z)$, etc. sich bestimmten endlichen Grenzwerthen p_1, p_2, etc. nähern, sodaſs

$$[\lim (z - a_1) f(z)]_{z = a_1} = p_1$$
$$[\lim (z - a_2) f(z)]_{z = a_2} = p_2$$
etc.

ist, so erhält man für das auf die ganze Begrenzung von T erstreckte Integral $\int f(z)\, dz$ den Werth (V. § 19)

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i\, (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots).$$

In dem vorigen Beispiele wird

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

auch für $z = -i$ unendlich groſs, und für diesen Punkt erhält man

$$p_2 = \left[\lim \frac{z + i}{1 + z^2}\right]_{z = -i} = \left[\lim \frac{1}{z - i}\right]_{z = -i} = -\frac{1}{2i},$$

also auf eine den Punkt $-i$ umgebende Linie erstreckt

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = -\pi.$$

Für eine Linie, welche beide Punkte $+i$ und $-i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt, wird daher dieses Integral $= \pi - \pi = 0$.

Vermittelst solcher geschlossener Linien, die nur einen einzigen Unstetigkeitspunkt umgeben, kann man nun innerhalb eines Flächentheils, der keine Verzweigungspunkte der Funktion $f(z)$ und auch keine Lücken enthält, die für verschiedene Integrationswege geltenden Werthe der Integrale auf einander beziehen. Wenn zwei Wege bec und bdc (Fig. 29) nur einen Unstetigkeitspunkt a und keinen Verzweigungspunkt einschlieſsen*), so kann der eine, z. B. bdc dadurch ersetzt werden, daſs man dem andern bec eine den Un-

*) Die Voraussetzung, daſs die beiden Wege keinen Verzweigungspunkt einschlieſsen, ist im Allgemeinen nur darum nothwendig, damit sie zusammengenommen eine vollständige Begrenzung bilden, was nicht immer der Fall zu sein braucht, wenn Verzweigungspunkte dazwischen liegen.

stetigkeitspunkt umgebende geschlossene Linie $bghb$ vorangehen läfst. Denn nach IV. § 19 ist

$$
\begin{aligned}
& J(bghb) = J(bdceb) = J(bdc) - J(bec) \\
\text{also} \quad & J(bdc) = J(bghb) + J(bec) \\
\text{oder auch} \quad & J(bec) = -J(bghb) + J(bdc) \\
& \qquad = J(bhgb) + J(bdc).
\end{aligned}
$$

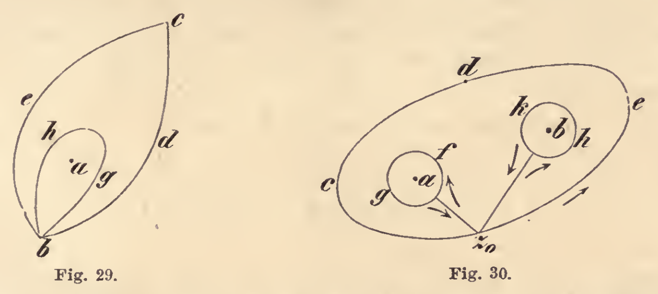


Fig. 29. Fig. 30.

Ebenso verhält es sich, wenn zwei Wege mehrere Unstetigkeitspunkte, aber keine Verzweigungspunkte einschliefsen. Umgeben z. B. die Wege z_0ed und z_0cd (Fig. 30) zwei Unstetigkeitspunkte a und b, so ziehe man aus z_0 um jeden derselben eine geschlossene Linie z_0fgz_0 und z_0hkz_0. Dann ist

$$
\begin{aligned}
J(z_0hkz_0) + J(z_0fgz_0) &= J(z_0edcz_0) \\
&= J(z_0ed) - J(z_0cd),
\end{aligned}
$$

also

$$J(z_0ed) = J(z_0fgz_0) + J(z_0hkz_0) + J(z_0cd).$$

Man kann daher den einen Weg dadurch ersetzen, dafs man dem andern geschlossene Linien um je einen der Unstetigkeitspunkte vorhergehen läfst.

Wie sich das Integral A um einen Unstetigkeitspunkt a verhält, wenn darin $(z-a)f(z)$ nicht mehr einen bestimmten endlichen Grenzwerth hat, kann erst später (Abschnitt VIII) erledigt werden.

§ 21.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dafs der Unstetigkeitspunkt zugleich ein Verzweigungspunkt ist, in welchem Falle er mit b, und der Integralwerth für eine um ihn gelegte Linie mit B bezeichnet werden soll; wir nehmen an, dafs in diesem Punkte m Blätter der Fläche zusammenhängen. Will man hier eine geschlossene Linie haben, die den Punkt b umgiebt, so mufs

dieselbe m Umläufe um b machen, also z. B. die Peripherie eines Kreises m Mal durchlaufen werden. *Riemann* führt für diesen Fall statt z eine neue Variable ζ ein, indem er setzt

$$\zeta^m = z - b,$$

welche also für $z = b$ den Werth 0 erhält, und untersucht, wie sich die Funktion $f(z)$, als Funktion von ζ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ verhält. Zu diesem Ende sehen wir zuerst zu, welche Linie ζ beschreibt, während z einen geschlossenen Kreis, d. h. also m Umläufe um einen solchen zurücklegt. Setzt man wieder

$$z - b = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

also

$$\zeta = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{1}{m}\vartheta + i\sin\frac{1}{m}\vartheta\right),$$

so bleibt r, also auch $r^{\frac{1}{m}}$ constant, und daher beschreibt ζ ebenfalls einen Kreis und zwar um den Nullpunkt. Hat aber z einen Umlauf vollendet, sodafs ϑ von 0 bis 2π gewachsen ist, so ist $\frac{1}{m}\vartheta$ von 0 bis $\frac{2\pi}{m}$ gewachsen, also hat ζ den $m$ten Theil der Peripherie zurückgelegt. Bei dem zweiten Umlaufe des z beschreibt ζ aufs Neue einen $m$ten Theil der Peripherie, und ebenso bei jedem neuen Umlaufe des z. Hat z daher m Umläufe gemacht und ist auf seinen Ausgangspunkt zurückgekommen, so hat ζ die ganze Peripherie des Kreises gerade einmal durchlaufen. Den m Flächentheilen, welche von dem Radius r während jedes Umlaufes überstrichen werden, entsprechen also m Kreissectoren, jeder mit dem Centriwinkel $\frac{2\pi}{m}$. Diese fügen sich an einander und bilden zusammen eine einfache Kreisfläche. In Fig. 31 ist angenommen, dafs in dem Punkte b drei Blätter zusammenhängen, welche über den Verzweigungsschnitt bb' hinüber sich in einander fortsetzen. Die in den drei Blättern verlaufenden Kreislinien sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und die im 1sten, 2ten und 3ten Blatte verlaufenden Linien resp. durch eine ausgezogene Linie, durch Striche und durch Punkte bezeichnet worden. Dann entspricht

der Fläche cde der Kreissector $c'oe'$
" " efg " " $e'og'$
" " ghc " " $g'oc'$,

dem ganzen von der geschlossenen Linie $cdefghc$ begrenzten Flächentheile entspricht daher die einfache Kreisfläche $c' e' g' c'$. Es ergiebt sich also, dafs, während z, alle m Blätter durchlaufend, erst nach m Umläufen zu seinem Ausgangspunkte zurückkommt, dies bei ζ schon nach dem ersten Umlaufe eintritt. Die Variable ζ tritt daher aus ihrem ersten Blatte nicht heraus, und folglich hat die Funktion $f(z)$ als Funktion von ζ betrachtet an der Stelle $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunkt. Wenn wir demnach in dem Integrale $\int f(z)\,dz$ ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt b umgiebt, ζ als Variable einführen, so können wir die Betrachtung des vorigen Paragraphen anwenden, weil $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunkt, sondern ein blofser Unstetigkeitspunkt ist.

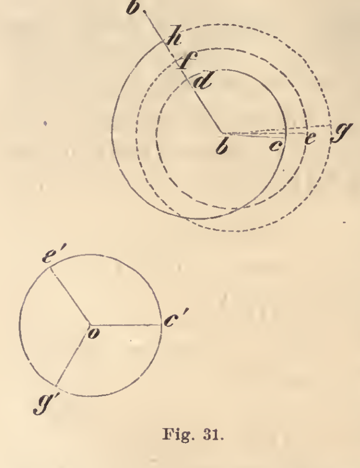


Fig. 31.

Es gehe nun durch die Substitution von $\zeta = (z - b)^{\frac{1}{m}}$ die Funktion $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ über; dann wird, weil $dz = m\zeta^{m-1}d\zeta$ ist,

$$B = m\int \zeta^{m-1}\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = m\int \zeta^m\,\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{m}\,\vartheta = \psi$, also $\zeta = r^{\frac{1}{m}}(\cos\psi + i\sin\psi)$, so wächst bei dem ganzen Umlaufe ψ von 0 bis 2π, und da wie oben $\frac{d\zeta}{\zeta} = i\,d\psi$ ist, so erhält man

$$B = m\int_0^{2\pi} \zeta^m\,\varphi(\zeta)\,i\,d\psi.$$

Nun ist der Annahme nach $\varphi(\zeta)$ für $\zeta = 0$ unendlich grofs. Geschieht dies Unendlichwerden aber so, dafs eins der Produkte

$$\zeta\varphi(\zeta),\ \zeta^2\varphi(\zeta),\ \ldots,\ \zeta^{m-1}\varphi(\zeta)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert, so ist

$$[\lim \zeta^m\varphi(\zeta)]_{\zeta=0} = 0.$$

Läfst man also den Radius r der um den Punkt b beschriebenen Kreislinien ins Unendliche abnehmen, so wird dann

$$B = 0.$$

Kehren wir nun wieder zur Variablen z zurück, so erhalten wir den Satz: Wenn das Integral $\int f(z)\,dz$ auf eine geschlossene Linie ausgedehnt wird, die einen Unstetigkeitspunkt umgiebt, der zugleich ein Verzweigungspunkt ist, in welchem m Blätter der Fläche zusammenhängen, so hat dasselbe immer den Werth Null, wenn eins der Produkte

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} f(z), \; (z-b)^{\frac{2}{m}} f(z), \ldots (z-b)^{\frac{m-1}{m}} f(z)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert.

Als Beispiel diene

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

welches für $z = 1$ unendlich wird. Dieser Punkt ist zugleich ein Verzweigungspunkt, in welchem zwei Blätter zusammenhängen. Man setze daher

$$\zeta^2 = z - 1$$

und erhält

$$f(z) = \varphi(\zeta) = \frac{1}{i\zeta\sqrt{(2+\zeta^2)(1-k^2[1+\zeta^2]^2)}},$$

sodafs in der That $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunkt für $\varphi(\zeta)$ ist. Nun erhält man

$$\lim\left[(z-1)^{\frac{1}{2}} f(z)\right]_{z=1} = \left[\lim \frac{1}{i\sqrt{(z+1)(1-k^2z^2)}}\right]_{z=1} = \frac{1}{i\sqrt{2(1-k^2)}},$$

folglich ist

$$[\lim\,(z-1)\,f(z)]_{z=1} = 0$$

und daher auch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 0,$$

wenn das Integral längs einer den Punkt $z = 1$ umgebenden geschlossenen Linie genommen wird. Denselben Werth hat das In-

tegral auch, wenn die geschlossene Linie einen der drei anderen Verzweigungspunkte $-1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ umgiebt.

Die Untersuchung, welchen Werth das Integral B hat, wenn die Voraussetzungen des vorigen Satzes nicht erfüllt sind, kann erst später (Abschnitt VIII) vorgenommen werden.

Fünfter Abschnitt.

Der Logarithmus und die Exponentialfunktion.

§ 22.

Da wir in der Folge von einigen Eigenschaften des Logarithmus Gebrauch zu machen genöthigt sein werden, so müssen wir für einen Augenblick die allgemeinen Betrachtungen unterbrechen und uns zuerst mit dieser speziellen Funktion beschäftigen. Dabei erscheint es nicht unzweckmässig, diese Untersuchung etwas vollständiger zu führen, als es für die beabsichtigte Anwendung nothwendig gewesen wäre, und auch gleich daran die Betrachtung der aus dem Logarithmus folgenden Exponentialfunktion anzuschliessen. Da wir es hier alsdann mit einem speziellen Falle der in den Abschnitten IX und X anzustellenden allgemeinen Untersuchungen zu thun haben, so kann dies Beispiel auch dazu dienen, für jene späteren Betrachtungen die Vorstellungen zu fixiren.

Wir bezeichnen nach *Riemann* mit dem Namen Logarithmus eine Funktion $f(z)$, welche die Eigenschaft hat, dafs

$$f(z\,.\,u) = f(z) + f(u) \tag{1}$$

ist. Dadurch ist die Funktion bis auf eine Constante vollständig bestimmt, denn wir werden daraus alle ihre Eigenschaften ableiten können. Setzt man zuerst $u = 1$ und läfst z beliebig, so folgt

$$f(z) = f(z) + f(1),$$

also

$$f(1) = \text{Log}\,1 = 0.$$

Setzt man aber $u = 0$, so erhält man

$$f(0) = f(z) + f(0);$$

giebt man nun dem z einen Werth, für welchen $f(z)$ nicht gleich Null ist, so folgt

$$f(0) = \text{Log}\, 0 = \infty;$$

aus demselben Grunde wird auch Log ∞ unendlich grofs. Man kann ferner den Logarithmus durch ein Integral ausdrücken. Denn differentiirt man die Gleichung (1) partiell nach u, so folgt

$$zf'(zu) = f'(u),$$

und wenn man dann $u = 1$ setzt,

$$zf'(z) = f'(1).$$

Die Constante $f'(1)$ bezeichnen wir mit m. Von dieser Constanten hängt der Werth des Logarithmus einer Zahl ab. Die Logarithmen aller Zahlen, die man erhält, wenn man der Constanten m einen bestimmten Werth beilegt, bilden zusammen ein Logarithmensystem, und man nennt die Constante m den Modulus dieses Logarithmensystems.

Aus der Gleichung

$$zf'(z) = m$$

folgt nun

$$df(z) = d\,\text{Log}\, z = m\frac{dz}{z}, \tag{2}$$

also

$$f(z) = m\int\frac{dz}{z} + C.$$

Da $f(1) = 0$ ist, so erhält die Constante C den Werth Null, wenn man dem Integral die untere Grenze 1 zuertheilt und z reelle Werthe durchlaufen läfst. Wir setzen daher auch im Allgemeinen

$$\text{Log}\, z = m\int_1^z\frac{dz}{z}$$

und haben damit den Logarithmus durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt. Für die Analysis sind die Logarithmen desjenigen Systems die einfachsten, in welchem die Constante m den Werth 1 hat. Diese nennt man natürliche Logarithmen, und wir werden im Folgenden solche unter dem Zeichen $\log z$ verstehen. Dann ist also

$$\log z = \int_1^z\frac{dz}{z},$$

und daher

$$\text{Log}\, z = m\,.\log z.$$

Setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so erhält man

$$\begin{aligned} dz &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,dr + r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(dr + i\,r\,d\varphi), \end{aligned}$$

also

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi.$$

Geht nun z auf irgend einem Wege von 1 nach einem beliebigen Punkte z, so durchläuft r die reellen Werthe von 1 bis r, und φ von 0 bis φ, daher ist

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^r \frac{dr}{r} + i\varphi$$

oder

$$\log z = \log r + i\varphi. \tag{3}$$

Hiedurch ist $\log z$ auf die Form einer complexen Gröfse gebracht, denn da r in dem Integral $\int_1^r \frac{dr}{r}$ nur reelle und positive Werthe annimmt, so ist auch $\log r$ reell; und man sieht zugleich, dafs $\log r$ positiv oder negativ ist, je nachdem r gröfser oder kleiner als 1 ist; denn da r immer positiv ist, so bewegt sich der darstellende Punkt auf der positiven Hauptaxe im ersten Falle nach der positiven, im letzteren Falle nach der negativen Seite, und daher sind im ersteren Falle alle Elemente $\frac{dr}{r}$ positiv, im letzteren alle negativ.

Wir ersehen ferner, dafs der Logarithmus von dem Integrationswege abhängig ist; denn bezeichnet φ den Werth, den dieser Winkel erreicht, wenn z auf einer den Nullpunkt nicht umwindenden Linie, bei welcher die Winkel wachsen, von 1 nach z geht, so ist $\varphi - 2\pi$ der Werth, den dieser Winkel annimmt, wenn die Linie auf der andern Seite des Nullpunktes, also in der Richtung der abnehmenden Winkel von 1 nach z führt; und wird der Nullpunkt von einer Linie n Mal in der Richtung der wachsenden Winkel umwunden, so erreicht φ in z den Werth $\varphi + 2n\pi$. Demnach ist vollständig

$$\log z = \log r + i\varphi \pm 2n\pi i.$$

Hiedurch bestätigen sich unsere allgemeinen Betrachtungen. Die Funktion $\frac{1}{z}$ hat keinen Verzweigungspunkt, dagegen den Unstetigkeitspunkt $z = 0$. Läfst man z eine geschlossene Linie um den Nullpunkt beschreiben, so ist der Werth des auf diese Linie in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckten Integrals $= 2\pi i$, weil

$$p = \left[\lim z \frac{1}{z}\right]_{z=0} = 1$$

ist (§ 20). Durch die am Schlusse des § 20 angestellten Betrachtungen erhält man dasselbe Resultat wie oben.

Hieraus folgt nun, dafs die Funktion $\log z$ in keinem Punkte der Ebene einen völlig bestimmten Werth hat und in irgend zwei unendlich nahen Punkten durch passende Anordnung der Integrationswege Werthe erhalten kann, die um ein Vielfaches von $2\pi i$ von einander verschieden sind. Um diese Unbestimmtheit so viel als möglich zu beschränken, denke man sich aus dem Nullpunkte eine ins Unendliche verlaufende Linie oq (Fig. 32) gezogen, welche sich selbst nicht schneidet. Eine solche Linie wird nach *Riemann* ein Querschnitt genannt. Dann mufs von je zwei von 1 nach z führenden Wegen, welche den Nullpunkt einschliefsen, der eine nothwendig den Querschnitt durchschneiden, und folglich nimmt $\log z$ auf allen den Querschnitt nicht überschreitenden Wegen in jedem Punkte z einen einzigen ganz bestimmten Werth an, der sich auch mit z überall stetig ändert. Nur auf den Punkten des Querschnittes selbst bleibt die Unbestimmtheit bestehen. Bezeichnet man nun die unendliche Ebene, in welcher z sich bewegt, mit T, und denkt dieselbe längs des Querschnittes oq wirklich durchgeschnitten, so entsteht eine Fläche, die mit T' bezeichnet werden möge. Innerhalb dieser kann der Querschnitt nicht überschritten werden, und daher ist $\log z$ innerhalb T' eine eindeutige Funktion von z, die nur für $z = 0$ und $z = \infty$ unendlich grofs wird, sonst aber überall stetig ist. In der Fläche T dagegen wird $\log z$ beim Überschreiten des Querschnittes unstetig. Denn sind z_1 und z_2 zwei zu beiden Seiten des Querschnittes unendlich nahe an einander liegende Punkte (z_1 etwa rechts und z_2 links von der Richtung oq), und läfst man z von 1 aus über z_1 und z_2 eine geschlossene Linie um den Nullpunkt beschreiben, so ist

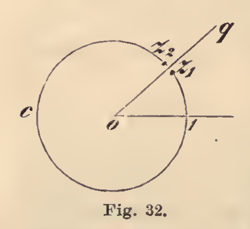


Fig. 32.

$$J(1 z_1 z_2 c 1) = J(1 z_1) - J(1 c z_2) = 2\pi i.$$

Bezeichnen also w_1 und w_2 die Werthe, welche $\log z$, zunächst in T' betrachtet, in z_1 und z_2 annimmt, sodafs

$$w_1 = J(1 z_1), \qquad w_2 = J(1 c z_2)$$

ist, so hat man

$$w_1 - w_2 = 2\pi i.$$

Denkt man sich also nun die Fläche T wieder hergestellt, so springt $\log z$, wenn z von z_1 nach z_2 geht, plötzlich von w_1 in $w_1 - 2\pi i$, oder wenn z von z_2 nach z_1 geht, plötzlich von w_2 nach $w_2 + 2\pi i$ über. Dieses gilt, an welcher Stelle der Integrationsweg den Querschnitt auch überschreiten mag. Längs des ganzen Querschnittes ist daher $\log z$ unstetig, und zwar sind für alle Punkte auf der rechten Seite desselben die Werthe von $\log z$ um $2\pi i$ gröfser als auf der linken. Dieser constante Werth, um welchen alle Funktionswerthe auf der einen Seite gröfser sind, als die benachbarten auf der andern Seite, heifst nach *Riemann* der Periodicitätsmodul der Funktion oder des Integrals, insofern erstere durch ein Integral dargestellt ist.

§ 23.

Aus dem Logarithmus leitet sich die Exponentialfunktion in folgender Art ab. Unter dem Zeichen

$$a^w$$

soll eine Funktion von w verstanden werden, für welche

$$\log(a^w) = w \cdot \log a$$

ist. Bezeichnet nun e die reelle Zahl, für welche $\log e$ den Werth 1 hat, ist also e durch die Gleichung

$$\int_1^e \frac{dr}{r} = 1$$

definirt, so hat man

$$\log(e^w) = w.$$

Daher ist e^w die inverse Funktion des Logarithmus, denn für $e^w = z$ folgt nun $w = \log z$. Aus der Gleichung (2)

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

erhält man

$$\frac{dz}{dw} = z,$$

also

$$\frac{de^w}{dw} = e^w.$$

Nimmt man für z eine complexe Gröfse, welche den Modul 1 hat, setzt man also

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

so hat man in der Gleichung (3)

$$\log z = \log r + i\varphi$$

$r = 1$ und daher $\log r = 0$ zu setzen. Demnach ist

$$\log(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\varphi$$

und folglich

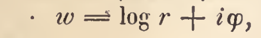
$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Die Exponentialfunktion ist periodisch, denn da einem Werthe von z nicht blofs der Werth w, sondern auch die Werthe $w \pm 2n\pi i$ angehören, so ist

$$z = e^w = e^{w \pm 2n\pi i},$$

also ändert sich e^w nicht, wenn w um ein Vielfaches des Periodicitätsmoduls $2\pi i$ vermehrt oder vermindert wird.

Versuchen wir nun, die Fläche T' der z auf einer Ebene W der w abzubilden. Wir nehmen dazu am einfachsten als Querschnitt eine durch 0 und 1 gehende Gerade an (Fig. 33). Nun ist



$$w = \log r + i\varphi,$$

wenn

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gesetzt wird. Daher sind $\log r$ und φ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes w. Lassen wir dann z einen Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt in der Richtung der wachsenden Winkel von a nach b beschreiben, so ist $\log r = 0$, und folglich ist w rein imaginär und geht

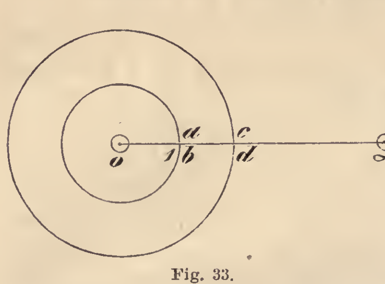
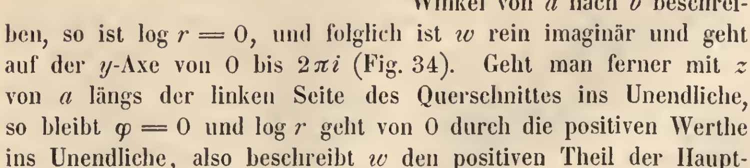


Fig. 33.



auf der y-Axe von 0 bis $2\pi i$ (Fig. 34). Geht man ferner mit z von a längs der linken Seite des Querschnittes ins Unendliche, so bleibt $\varphi = 0$ und $\log r$ geht von 0 durch die positiven Werthe ins Unendliche, also beschreibt w den positiven Theil der Haupt-

axe. Geht aber z von a auf der linken Seite des Querschnittes nach 0, so beschreibt w den negativen Theil der Hauptaxe ins Unendliche. Ist z zuerst um den Nullpunkt herum nach b auf die rechte Seite des Querschnittes gelangt und geht dann längs der rechten Seite derselben nach ∞ oder nach 0, so ist w zuerst auf der y-Axe von 0 bis $2\pi i$ gegangen und beschreibt dann, da nun φ constant $= 2\pi$ bleibt, eine der Hauptaxe parallele Gerade, einmal nach der positiven und dann nach der negativen Richtung. Den beiden Seiten des Querschnittes in T' entsprechen daher in W zwei verschiedene Linien, der linken die Hauptaxe AB, der rechten eine durch $2\pi i$ mit der Hauptaxe parallel laufende Gerade CD (Fig. 34). Läfst man nun z an irgend einer Stelle von der linken Seite c des Querschnittes auf einem Kreise um den Nullpunkt auf die rechte Seite d gelangen, so bleibt r und daher auch $\log r$ constant, und φ wächst von 0 bis 2π. Folglich beschreibt w eine der y-Axe parallele Gerade $c'd'$ von der Hauptaxe AB bis zu der Parallelen CD. Daraus folgt, dafs allen Punkten z in der ganzen unendlichen Ausdehnung der Fläche T', in welcher φ nicht über 2π hinaus wachsen kann, nur solche Punkte w entsprechen, die innerhalb des von den beiden Parallelen AB und CD gebildeten Streifens liegen. Die Funktion e^w oder z nimmt also innerhalb dieses Streifens ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, denn irgend zwei verschiedenen Werthen von $w = \log r + i\varphi$ gehören auch verschiedene Werthe von r oder φ und also auch verschiedene Werthe von

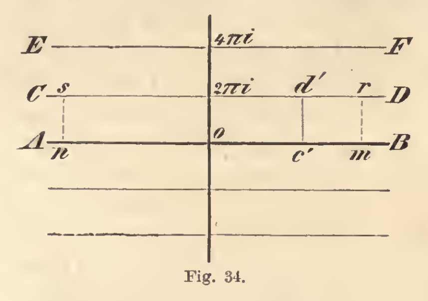


Fig. 34.

$$e^w = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

an. Will man die Fläche T' begrenzen, so kann dies einerseits dadurch geschehen, dafs man um den Nullpunkt einen Kreis mit einem sehr kleinen Radius ϱ beschreibt; diesem entspricht, da ϱ constant bleibt, in W eine der y-Axe parallele Gerade ns zwischen den beiden Parallelen AB und CD, welche sehr weit vom Nullpunkte entfernt auf der negativen Seite liegt. Diese rückt ins Unendliche, wenn ϱ bis zum Verschwinden abnimmt, also der Kreis in den Nullpunkt zusammenschrumpft. In allen Punkten dieser ins Unendliche gerückten Geraden ns hat daher e^w den

Werth Null. Andererseits kann die Begrenzung von T' durch einen Kreis um den Nullpunkt mit einem sehr grofsen Radius R gebildet werden. Diesem entspricht in W eine auf der positiven Seite sehr weit entfernte Gerade mr parallel der y-Axe. Wächst R ins Unendliche, so rückt auch diese Gerade ins Unendliche, und in allen ihren Punkten ist e^w unendlich grofs. Die Fläche T' kann im Unendlichen geschlossen angenommen werden, dann wird der Kreis mit dem grofsen Radius R durch einen kleinen Kreis um den Punkt ∞ vertreten, welcher in diesen Punkt zusammenschrumpft, wenn R ins Unendliche wächst. Dann bilden also die beiden Seiten des von 0 nach ∞ gehenden Querschnittes allein die Begrenzung der kugelförmigen Fläche T', und dieser entspricht der nach beiden Seiten ins Unendliche gehende Streifen zwischen den Parallelen AB und CD.

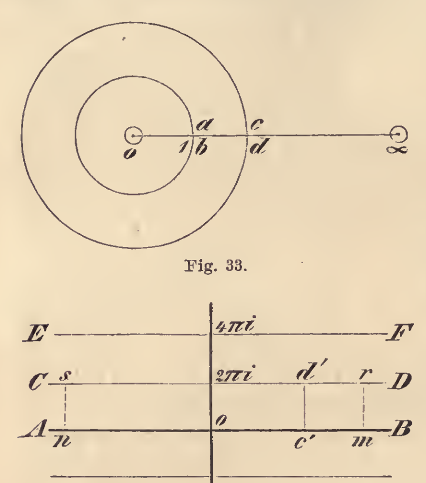


Fig. 33.

Fig. 34.

Lassen wir jetzt den Winkel φ über 2π hinaus wachsen, so setzt sich die Funktion w oder $\log z$ stetig fort; dann kann man sich den Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt denken, über den hinüber die Fläche T' sich in ein zweites Blatt fortsetzt. In diesem zweiten Blatte verhält sich dann alles wie im ersten, nur dafs in allen Punkten desselben φ um 2π, also w um $2\pi i$ gröfser ist, als an der entsprechenden Stelle im ersten Blatte. Daher erhält man in W einen zweiten Streifen zwischen den Parallelen CD und EF, welche durch $2\pi i$ und $4\pi i$ hindurchgehen. Setzt man diese Betrachtung fort und wendet sie auch auf negative Werthe von φ an, so wird die Ebene W in unendlich viele parallele Streifen getheilt. In jedem nimmt die Funktion e^w ihre sämmtlichen Werthe einmal an und hat in je zwei entsprechenden Punkten zweier verschiedener Streifen die nämlichen Werthe. Auf der positiven Seite jedes Streifens geht e^w ins Unendliche, auf der negativen Seite aber nähert es sich der Null.

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der Funktionen.

§ 24.

Die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet der überaus wichtige, in § 20 bewiesene Satz: Wird das Integral $\int f(z)\,dz$ auf die Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt, in welchem $f(z)$ nur in einem Punkte $z = a$, der kein Verzweigungspunkt ist, unstetig wird, und zwar so, dafs $(z - a) f(z)$ sich für $z = a$ einem bestimmten endlichen, von der Art der Annäherung an a unabhängigen Grenzwerthe p nähert, so ist

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i p.$$

Ist nun $\varphi(z)$ eine Funktion, die in einem Flächentheile T keine Verzweigungspunkte besitzt und sowohl im Innern, als auch auf der Begrenzung von T endlich und stetig bleibt, und bedeutet t einen beliebigen Punkt im Innern dieser Fläche, so hat die Funktion

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - t}$$

in T die in dem vorigen Satze verlangten Eigenschaften. Sie wird nur unstetig für $z = t$, und da sie ebenso wie $\varphi(z)$ keine Verzweigungspunkte innerhalb T besitzt, so kann t niemals auf einen solchen fallen; ferner wird $f(z)$ für $z = t$ so unstetig, dafs

$$(z - t) f(z) = \varphi(z)$$

sich einem bestimmten endlichen Grenzwerthe, nämlich $\varphi(t)$, nähert. Man hat also

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z - t} = 2\pi i \varphi(t)$$

und daher

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z - t}, \tag{1}$$

das Integral auf die Begrenzung von T erstreckt.

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist an die Voraussetzung gebunden, dafs die innerhalb T einändrige Funktion $\varphi(t)$ in jedem Punkte t dieses Gebietes einen völlig bestimmten endlichen Werth habe, der immer derselbe ist, wie sich auch die Variable diesem Punkte nähern möge. Es mag nämlich gleich hier darauf auf-

merksam gemacht werden, dafs es bei eindeutigen Funktionen in speziellen Punkten vorkommen kann, dafs das nicht der Fall ist*). So z. B. erlangt die Funktion $e^{\frac{1}{z}}$ für $z = 0$ den Werth Null oder wird unendlich grofs, jenachdem z durch die reellen negativen oder durch die reellen positiven Werthe sich der Null nähert. Ebenso erlangt die Funktion

$$\frac{c^2}{c - e^{\frac{1}{z}}},$$

in der c eine Constante bedeutet, für $z = 0$ in dem ersteren Falle den Werth c, in dem letzteren den Werth Null. In einem solchen Punkte hört dann aber auch immer die Stetigkeit auf. Denn läfst man bei dem letzten Beispiele die Variable die reellen Werthe wachsend durchlaufen, so springt die Funktion beim Überschreiten des Werthes $z = 0$ plötzlich von c nach 0 über. Durch die Forderung, dafs eine Funktion in einem Gebiete überall stetig sei, wird demnach das Vorkommen solcher Punkte mit ausgeschlossen.

Wenn nun die obigen Bedingungen erfüllt sind, so wird durch die Gleichung (1) der Werth der Funktion φ für jeden Punkt t im Innern von T durch ein Integral gegeben, bei welchem die Variable z nur die Punkte der Begrenzung von T durchläuft; dieses Integral hat in der That für jeden im Innern von T liegenden Punkt t einen endlichen Werth und ändert sich stetig mit t. (S. unten.) Denkt man sich die Funktion $\varphi(z)$ nicht durch einen Ausdruck, sondern durch ihre Werthe für alle Punkte eines gewissen Gebietes gegeben, so folgt aus der vorigen Gleichung, dafs, wenn die Funktion nur für alle Punkte der Begrenzung von T gegeben ist, sie für jeden Punkt im Innern von T ebenfalls ermittelt werden kann und daher im Innern von T nicht mehr willkürlich angenommen werden darf.

Hat z. B. eine Funktion $\varphi(z)$ an der Begrenzung von T überall den constanten Werth C, so erhält man aus (1)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{C dz}{z - t} = \frac{C}{2\pi i}\int \frac{dz}{z - t}.$$

---

*) Mit der im dritten Abschnitte erörterten Verschiedenheit der erlangten Funktionswerthe, welche bei mehrdeutigen Funktionen durch eine Verschiedenheit der durchlaufenen Wege hervorgebracht wird, hat das Obige nichts zu thun. Durch die Einführung der *Riemann*'schen Flächen ist vielmehr diese Verschiedenartigkeit aufgehoben.

Dieses Integral behält aber seinen Werth, wenn man die Integrationscurve durch einen um t beschriebenen Kreis ersetzt. Dann hat man (§ 20)

$$\int \frac{dz}{z-t} = 2\pi i;$$

mithin wird für jeden Werth von t

$$\varphi(t) = C.$$

Ist also eine Funktion in einem Gebiete T überall stetig und eindrig, und hat sie an der Begrenzung von T den constanten Werth C, so ist sie auch im Innern von T überall constant gleich C.

Es folgt ferner aus (1) durch Differentiation nach t

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^2}\,dz \\ \varphi''(t) &= \frac{2}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^3}\,dz \\ \varphi'''(t) &= \frac{2\cdot 3}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^4}\,dz \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{(n)}(t) &= \frac{2.3\ldots n}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Alle diese Integrale erstrecken sich auf die Begrenzung von T, daher verschwindet in ihnen niemals $z - t$. Bedeutet also h irgend eine positive ganze Zahl, so ist

$$\frac{1}{(z-t)^h}$$

für jeden in Betracht kommenden Werth von t endlich und ändert sich stetig mit t. Dasselbe gilt, wenn der vorige Bruch mit irgend einem von t unabhängigen Werthe $\varphi(z)$ multiplicirt wird; es ändert sich also auch die durch das Integral

$$\int \frac{\varphi(z)dz}{(z-t)^h}$$

dargestellte Summe, bei welcher $\varphi(z)$ nach und nach alle an der Begrenzung von T stattfindenden Werthe anzunehmen hat, stetig mit t; und da diese Werthe der Annahme nach endlich sind, so hat auch das Integral einen endlichen Werth (§ 16). Demnach sind alle die vorigen Integrale, so wie auch das in (1) enthaltene,

innerhalb T endliche und stetige Funktionen von t*). Hieraus folgt der Satz: Wenn eine Funktion in einem Gebiete keine Verzweigungspunkte besitzt und darin endlich und stetig ist, so sind auch alle ihre Derivirten in demselben Gebiete endliche und stetige Funktionen.

Bezieht man in der Gleichung (1) die Integration auf einen beliebig kleinen Kreis um den Punkt t mit dem Radius r und setzt zu dem Ende

$$z - t = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so ist

$$\frac{dz}{z-t} = i d\vartheta,$$

und daher

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)d\vartheta.$$

Setzt man nun

$$\varphi(z) = u + iv, \quad \varphi(t) = u_0 + iv_0,$$

so erhält man durch Sonderung des Reellen vom Imaginären

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u d\vartheta \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v d\vartheta.$$

Hieraus folgt, dafs die reellen Bestandtheile der Funktion φ im Punkte t Mittelwerthe aus allen ringsherum liegenden benachbarten Werthen dieser Bestandtheile sind. Es muss also u_0 grösser als ein Theil, und zugleich kleiner als ein anderer Theil dieser Nachbarwerthe sein. Dasselbe gilt von v_0, und da das Nämliche in jedem Punkte des Gebietes T stattfindet, so haben die reellen Bestandtheile der Funktion φ in keinem Punkte von T einen Maximal- oder einen Minimalwerth.

§ 25.

Mit Hülfe der Gleichung (1) kann die Funktion φ in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Man beschreibe um einen beliebigen Punkt a des Gebietes T einen Kreis, der noch ganz in dieses Gebiet hineinfällt, und also noch nicht ganz bis an den zunächst an a gelegenen Unstetigkeitspunkt oder Verzweigungspunkt hinanreicht; diesen Kreis nehme man als Integrationscurve in der Gleichung (1). Nun ist für jeden im Innern des Kreises liegenden Punkt t

*) *C. Neumann*, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. S. 91.

$$\operatorname{mod}(z-a) > \operatorname{mod}(t-a)$$

(Fig. 35), da z bei der Integration nur Punkte der Peripherie des Kreises durchläuft, also $\overline{az} > \overline{at}$ ist. Man kann aber schreiben

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a-(t-a)} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1-\dfrac{t-a}{z-a}}$$

und diesen Bruch, weil

$$\operatorname{mod}\frac{t-a}{z-a} < 1$$

ist, in die convergirende Reihe

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a}\left\{1 + \frac{t-a}{z-a} + \frac{(t-a)^2}{(z-a)^2} + \frac{(t-a)^3}{(z-a)^3} + \cdots\right\}$$

entwickeln. Substituirt man diese Reihe in (1), so erhält man

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z-a} + (t-a)\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^2} + (t-a)^2\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^3} + \cdots\right\} \quad (3)$$

und dies ist nichts anderes als die Taylor'sche Reihe; denn nach (1) ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z-a} = \varphi(a) \quad (4)$$

und nach den Gleichungen (2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{2.3\ldots n}, \quad (5)$$

also erhält man

$$\varphi(t) = \varphi(a) + (t-a)\varphi'(a) + (t-a)^2\frac{\varphi''(a)}{2} + (t-a)^3\frac{\varphi'''(a)}{2.3} + \cdots \quad (6)$$

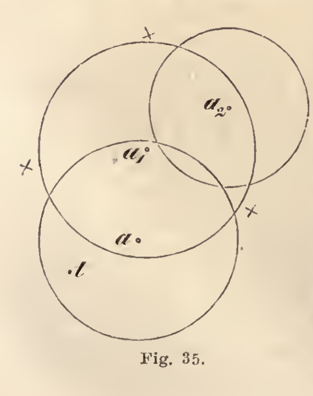


Fig. 35.

Diese Ableitung der Taylor'schen Reihe hat den Vortheil, dafs sie mit Bestimmtheit erkennen läfst, wie weit sich die Convergenz dieser Reihe erstreckt: nämlich auf alle Punkte t, welche von a weniger weit entfernt sind, als der nächste Unstetigkeitspunkt oder Verzweigungspunkt. In Fig. 35 sind drei solcher Punkte durch Kreuze angedeutet worden.

Den oben erwähnten, um a beschriebenen Kreis, dessen Radius so ge-

wählt ist, dafs im Innern und auf der Peripherie desselben kein Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt liegt, nennt man die Umgebung des Punktes a und kann dann den Satz aussprechen: Wenn eine Funktion $\varphi(t)$ in einem Punkte a, der kein Verzweigungspunkt ist, endlich und stetig ist, so kann sie für jeden Punkt t in der Umgebung von a durch eine convergente nach Potenzen von $t-a$ fortschreitende Reihe dargestellt werden; nämlich setzt man

$$p_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

worin die Integration entweder auf den obigen Kreis oder auf irgend eine andere den Punkt a umgebende Linie, die keinen Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt einschliefst, zu erstrecken ist, so ist nach (3)

$$\varphi(t) = p_0 + p_1(t-a) + p_2(t-a)^2 + \cdots\cdots, \tag{7}$$

worin nach S. 107 die Coefficienten p sämmtlich endliche Werthe haben.

In der Reihe (3) sind zwar ursprünglich alle Integrationen längs des Kreises um a zu nehmen; aber da die Funktionen

$$\frac{\varphi(z)}{z-a},\ \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2},\ \frac{\varphi(z)}{(z-a)^3},\ \text{etc.}$$

bis an den Punkt a heran endlich und stetig bleiben, so können die Integrale auch längs eines beliebig kleinen um a beschriebenen Kreises genommen werden, ohne ihre Werthe zu ändern. Wenn daher die Funktion φ durch ihre Werthe in einem beliebig kleinen endlichen, den Punkt a enthaltenen Flächenstücke gegeben ist, so sind dadurch alle jene Integrale, mithin alle Coefficienten der convergirenden Reihe bestimmt, und folglich kann der Werth der Funktion für jeden Punkt im Innern des grofsen Kreises ermittelt werden.

Ist nun a_1 ein Punkt, der noch im Innern dieses Kreises liegt, so ist also jetzt $\varphi(t)$ sowohl in a_1 als auch in dem ihn zunächst umgebenden Flächentheile bekannt. Beschreibt man dann um a_1 einen Kreis, der noch alle Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte aufserhalb läfst (Fig. 35), so kann $\varphi(t)$ für alle Punkte dieser Kreisfläche in eine neue Reihe entwickelt werden. Fährt man so fort, so sieht man, wenn die Funktion $\varphi(t)$ nur innerhalb eines beliebig kleinen endlichen Theiles eines Gebietes T gegeben ist, dafs sie dann schon in dem ganzen Gebiete T, in welchem

weder ein Unstetigkeitspunkt noch ein Verzweigungspunkt liegt, bestimmt werden kann.

Dasselbe gilt, wenn die Funktion $\varphi(t)$ nur längs einer beliebig kleinen endlichen von a ausgehenden Linie gegeben ist. Ist dies nämlich der Fall, und bezeichnet man die stetig auf einander folden Punkte dieser Linie mit a, b, c, d, etc., so ist

$$\varphi'(a) = \lim \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a},$$

also bekannt, wenn $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ bekannt sind. Ebenso ist

$$\varphi'(b) = \lim \frac{\varphi(c) - \varphi(b)}{c - b};$$

wodurch $\varphi'(b)$ bekannt wird. In dieser Weise können die Werthe der Derivirten $\varphi'(t)$ für alle Punkte a, b, c, d, etc. gefunden werden. Alsdann ist

$$\varphi''(a) = \lim \frac{\varphi'(b) - \varphi'(a)}{b - a}$$

$$\varphi''(b) = \lim \frac{\varphi'(c) - \varphi'(b)}{c - b}$$

u. s. w., sodafs auch die zweiten Derivirten bekannt sind. Fährt man in dieser Weise fort, so können die Werthe aller Derivirten für den Punkt a, also auch alle Coefficienten der Reihe (6) bestimmt werden. Man erhält also für jeden Punkt t innerhalb des ersten Kreises $\varphi(t)$ durch eine convergente Reihe ausgedrückt. Demnach kann man ebenso wie oben weiter schliefsen und von einem kleinen, den Punkt a_1 enthaltenden Flächenstücke ausgehend die Werthe von $\varphi(t)$ für jeden Punkt des zweiten Kreises ermitteln, u. s. f.

Aus dem Vorigen folgt der Satz: Eine Funktion einer complexen Variablen, welche in einem beliebig kleinen endlichen Theile der z-Ebene gegeben ist, kann darüber hinaus nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden.

Als einen speziellen Fall dieses Satzes heben wir hervor: Wenn eine Funktion in einem endlichen beliebig kleinen Theile des Gebietes T constant ist, so ist sie überall in T constant. Denn ist sie in einer kleinen Fläche, die den Punkt a enthält, constant $= C$, so nehme man in den Gleichungen (4) und (5) als Integrationscurve einen innerhalb dieses kleinen Flächentheils liegenden Kreis um a und setze

$$z - a = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

dann folgt aus (4)

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\, d\vartheta = \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta = C,$$

weil $\varphi(z)$ in allen Punkten der Peripherie des Kreises den Werth C besitzt. Ferner wird aus (5)

$$\frac{\varphi^{(n)}(a)}{2.3\ldots n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\frac{C}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta)\, d\vartheta,$$

und dieser Werth verschwindet, weil für jeden ganzzahligen von Null verschiedenen Werth von n

$$\int_0^{2\pi} \cos n\vartheta\, d\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin n\vartheta\, d\vartheta = 0$$

ist. In der Reihe (3) wird also $\varphi(a) = C$, und alle übrigen Glieder verschwinden, daher ist für jeden Punkt des Convergenzkreises $\varphi(t) = C$. Setzt man nun die Funktion in der oben angedeuteten Weise fort, so bleibt $\varphi(t)$ überall constant $= C$.

Dasselbe gilt, wenn $\varphi(t)$ längs einer beliebig kleinen endlichen Linie constant ist. In diesem Falle sind bei Anwendung der obigen Bezeichnung die Werthe $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$, etc. alle gleich C, und folglich verschwinden wieder alle Derivirten $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc., und damit alle Coefficienten der Reihe (6) mit Ausnahme des ersten, welcher $= C$ ist. Es gilt also dasselbe wie oben.

Aus diesem speziellen Satze kann wieder der vorhergehende allgemeinere abgeleitet werden. Wenn nämlich zwei Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in einem beliebig kleinen Flächen- oder Linientheile in ihren Werthen übereinstimmen, so ist in diesem Theile die Funktion $\varphi(t) - \psi(t)$ constant gleich Null; folglich ist diese Funktion überall gleich Null, d. h. es ist überall $\psi(t) = \varphi(t)$, und daher kann die Funktion $\varphi(t)$ von dem Theile aus, in dem sie gegeben ist, nicht auf zwei verschiedene Weisen fortgesetzt werden.

§ 26.

Wir gehen nun dazu über, eine Funktion, die in einem Punkte a, der kein Verzweigungspunkt ist, eine **Unstetigkeit beliebiger Art** erleidet, in der Umgebung dieses Punktes durch eine Reihe darzustellen.

Um den Punkt a als Mittelpunkt seien zwei Kreise beschrieben, der kleinere heifse C, der gröfsere K. Wir nehmen an, eine Funktion $\varphi(t)$ besitze weder innerhalb des kleineren Kreises, noch innerhalb des von beiden Kreisen gebildeten Ringes einen Verzweigungspunkt; ferner sei $\varphi(t)$ innerhalb des Ringes vollkommen stetig, dagegen mag sie innerhalb C beliebig unstetig werden können. Dann begrenzen die beiden Kreise C und K ein Flächenstück, innerhalb dessen $\varphi(t)$ alle Bedingungen erfüllt, unter denen die Gleichung (1) § 24 gilt. Man hat also für jeden Punkt t im Innern des Ringes

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\, dz}{z - t},$$

wobei sich aber das Integral auf jeden der beiden Kreise in positiver Begrenzungsrichtung zu erstrecken hat, und daher bei dem kleineren Kreise in der Richtung der abnehmenden Winkel genommen werden mufs. Man kann demnach setzen

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\, dz}{z - t} - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\, dz}{z - t} = J_1 + J_2.$$

Dann bezieht das erstere Integral sich auf den Kreis K, das zweite auf C, und beide sind in der Richtung der wachsenden Winkel zu nehmen.

Das erstere Integral J_1 liefert, da für jeden im Innern des Ringes liegenden Punkt t

$$\operatorname{mod}(t - a) < \operatorname{mod}(z - a)$$

ist, dieselbe Entwickelung, welche § 25 abgeleitet wurde, und man erhält nach (7)

$$J_1 = p_0 + p_1(t-a) + p_2(t-a)^2 + p_3(t-a)^3 \cdots,$$

worin

$$p_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}} \tag{8}$$

ist.

Bei dem zweiten Integrale J_2 dagegen liegen alle Punkte t innerhalb des Ringes aufserhalb des von der Variablen z durchlaufenen Kreises C, daher ist hier $\overline{az} < \overline{at}$ oder

$$\operatorname{mod}(z-a) < \operatorname{mod}(t-a) \quad \text{und} \quad \operatorname{mod}\frac{z-a}{t-a} < 1.$$

Schreibt man daher

$$-\frac{1}{z-t} = \frac{1}{t-a-(z-a)} = \frac{1}{t-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}},$$

so kann man diesen Bruch nach Potenzen von $\frac{z-a}{t-a}$ in eine convergirende Reihe entwickeln und erhält

$$-\frac{1}{z-t} = \frac{1}{t-a} + \frac{z-a}{(t-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(t-a)^3} + \cdots.$$

Wird dies in J_2 substituirt, so ergiebt sich

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{t-a}\int \varphi(z)\,dz + \frac{1}{(t-a)^2}\int \varphi(z)(z-a)\,dz + \frac{1}{(t-a)^3}\int \varphi(z)(z-a)^2\,dz + \cdots\right\},$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)(z-a)^{n-1}\,dz = c^{(n)} \tag{9}$$

gesetzt wird,

$$J_2 = \frac{c'}{t-a} + \frac{c''}{(t-a)^2} + \frac{c'''}{(t-a)^3} + \cdots.$$

Man erhält daher für alle Punkte t innerhalb des Ringes die Reihe

$$\begin{aligned}\varphi(t) = p_0 + p_1(t-a) + p_2(t-a)^2 + p_3(t-a)^3 + \cdots \\ + \frac{c'}{t-a} + \frac{c''}{(t-a)^2} + \frac{c'''}{(t-a)^3} + \cdots\end{aligned} \tag{10}$$

Diese Reihenentwickelung findet Anwendung, wenn eine Funktion $\varphi(t)$ in einem Punkte a, der kein Verzweigungspunkt ist, eine Unstetigkeit beliebiger Art erleidet. Denn umgiebt man den Unstetigkeitspunkt a mit einem beliebig kleinen Kreise, so treffen die vorhin gemachten Voraussetzungen zu, wenn man diesen Kreis als Integrationscurve C für die Integrale $c^{(n)}$ nimmt, während die Integrale p_n sich auf einen Kreis K beziehen, der nur so grofs ist, dafs jeder aufser a noch vorhandene Unstetigkeitspunkt und jeder Verzweigungspunkt aufserhalb K liegt. Die Reihe (10) liefert dann für jeden innerhalb K liegenden Punkt t einen endlichen Werth für $\varphi(t)$, mit Ausnahme des Punktes a selbst. Man bemerke dabei, dafs auch die Integrale $c^{(n)}$ auf den Kreis K erstreckt werden können, da sie für diesen dieselben Werthe haben, wie in Bezug auf C. (§ 19.)

Aus dem Vorigen kann auch eine Reihe abgeleitet werden, welche gilt, wenn $\varphi(t)$ in dem Punkte $t = \infty$ irgend eine Unstetigkeit erleidet, und dieser Punkt kein Verzweigungspunkt ist. Zu dem Ende setze man

$$z = \frac{1}{u}, \qquad t = \frac{1}{v},$$

wodurch $\varphi(z)$ in $f(u)$, und $\varphi(t)$ in $f(v)$ übergehe; dann wird $f(v)$ für $v = 0$ unstetig. Läfst man nun z einen Kreis Z um den Nullpunkt durchlaufen und setzt deshalb

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so wird

$$u = \frac{1}{r}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta);$$

daher beschreibt u ebenfalls einen Kreis U um den Nullpunkt, aber in der entgegengesetzten Richtung. Da ferner $\frac{1}{r}$ mit wachsendem r abnimmt, so entsprechen den aufserhalb Z liegenden Punkten z die innerhalb U liegenden Punkte u. Nimmt man also den Kreis Z so grofs an, dafs er alle Verzweigungspunkte umgiebt, und $\varphi(t)$ aufserhalb Z nur für $t = \infty$ unstetig ist, so hat $f(v)$ innerhalb U keine Verzweigungspunkte und erleidet nur für $v = 0$ eine Unstetigkeit. Man kann daher*) die Reihe (10) zur Entwickelung von $f(v)$ benutzen, wenn man $a = 0$ setzt, und erhält

$$\begin{aligned} f(v) = p_0 + p_1 v + p_2 v^2 + p_3 v^3 + \cdots \\ + \frac{c'}{v} + \frac{c''}{v^2} + \frac{c'''}{v^3} + \cdots, \end{aligned} \tag{11}$$

worin nach (8) und (9)

$$p_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)\,du}{u^{n+1}}, \qquad c^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,u^{n-1}\,du$$

ist. Beide Integrale können nach der oben gemachten Bemerkung auf den Kreis U erstreckt werden; sie sind wie (8) und (9) in der Richtung der wachsenden Winkel zu nehmen. Führt man dann statt u und v wieder z und t ein, so ist

---

*) Man bemerke, da $u = 0$ der Annahme nach kein Verzweigungspunkt ist, dafs man die Verzweigungsschnitte so legen kann, dafs keiner in den Punkt $u = 0$ einmündet; dann begrenzt die Linie U einen Flächentheil, und folglich auch die Linie Z.

$$du = -\frac{dz}{z^2},$$

also

$$\frac{du}{u^{n+1}} = -z^{n-1}dz, \quad u^{n-1}du = -\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Die nach z zu nehmenden Integrale erstrecken sich dann auf den Kreis Z, aber, da U in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wurde, in der umgekehrten Richtung. Will man sie auch in der Richtung der wachsenden Winkel nehmen, so hat man die Minuszeichen zu tilgen und erhält so

$$(12) \qquad p_n = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)z^{n-1}dz, \quad c^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}dz$$

und damit aus (11)

$$(13) \qquad \varphi(t) = p_0 + \frac{p_1}{t} + \frac{p_2}{t^2} + \frac{p_3}{t^3} + \cdots \\ + c't + c''t^2 + c'''t^3 + \cdots$$

Durch diese Reihe wird der Werth von $\varphi(t)$ dargestellt für alle Punkte t, mit Ausnahme von $t = \infty$, die aufserhalb eines Kreises Z liegen, der um den Nullpunkt so beschrieben ist, dafs alle endlichen Unstetigkeitspunkte und alle Verzweigungspunkte innerhalb desselben liegen.

Siebenter Abschnitt.

Über das unendlich grofs und unendlich klein Werden der Funktionen.

A. Funktionen ohne Verzweigungspunkte. Einwerthige Funktionen.

§ 27.

Bei der näheren Untersuchung der Unstetigkeitspunkte, zu der wir uns jetzt wenden, werden wir zuerst Verzweigungspunkte aus den Betrachtungen gänzlich ausschliefsen. Diese beziehen sich daher im Allgemeinen auf die einwerthigen Funktionen; doch mag ausdrücklich bemerkt werden, dafs sie auch für mehrdeutige Funktionen gelten, so lange es sich nur um endliche Flächentheile handelt, innerhalb derer sich keine Verzweigungspunkte befinden.

Wenn man die Variable z einem Punkte a sich nähern läfst, so kann eine Funktion $\varphi(z)$ entweder bei allen Annäherungen an diesen Punkt immer denselben Werth annehmen, oder nicht; und in dem ersteren Falle kann der erlangte Werth entweder endlich sein, oder unendlich grofs. Daher liegen für das Verhalten einer Funktion $\varphi(z)$ in einem Punkte a folgende Möglichkeiten, und nur diese, vor:

1) Die Funktion erlangt in a bei allen Annäherungen an diesen Punkt einen und denselben endlichen Werth.

2) Die Funktion wird in a bei allen Annäherungen unendlich grofs.

3) Die Funktion erlangt in a nicht bei allen Annäherungen denselben Werth, sondern kann bei verschiedenen Annäherungen verschiedene Werthe annehmen. (Dafs dies in der That vorkommen kann, wurde schon § 24 durch Beispiele erläutert.)*)

In dem ersten Falle, und nur in diesem, ist die Funktion im Punkte a stetig; in jedem der beiden anderen Fälle wird sie unstetig, es giebt daher zwei und nur zwei verschiedene Arten der Unstetigkeit, die auch durch besondere Benennungen unterschieden werden.

Unter einer Unstetigkeit der ersten Art oder einer polaren Unstetigkeit**) versteht man den Fall, dafs eine Funktion $\varphi(z)$ in a bei jeder Annäherung der Variablen an diesen Punkt unendlich grofs wird. Eine solche Unstetigkeit ist auch dadurch charakterisirt, dafs $\frac{1}{\varphi(z)}$ für $z = a$ vollkommen stetig ist, und also bei jeder Annäherung an den Punkt a den Werth Null annimmt.

Eine Unstetigkeit zweiter Art oder eine nichtpolare Unstetigkeit tritt dagegen in einem Punkte a ein, wenn der Werth, den die Funktion in a erlangt, je nach dem Wege und

---

*) Man könnte auch an die Möglichkeit denken, dafs die Funktion in a bei verschiedenen Annäherungen unendlich grofs von verschiedener Ordnung werden könnte. Aber abgesehen davon, dafs dies sich später als unmöglich erweisen wird, kann ein solcher Fall gegenwärtig deswegen nicht in Betracht gezogen werden, weil der Begriff des Unendlichwerdens von einer bestimmten Ordnung überhaupt noch nicht aufgestellt werden kann. Es handelt sich vielmehr jetzt nur um die Alternative, wenn die Funktion in a bei allen Annäherungen denselben Werth annimmt, ob dieser ein endlicher (Null mit einbegriffen) ist, oder nicht.

**) *C. Neumann.* Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Funktionen. S. 94.

der Art, wie die Variable sich dem Punkte a nähert, verschieden sein kann. Wenn man nämlich durch a eine Linie map so legen kann, dafs die Funktion auf dem Wege ma einen andern Werth erlangt, als auf dem Wege pa, so springt sie, wenn z auf der Linie map den Punkt a überschreitet, plötzlich von dem ersteren zu dem letzteren Werthe über, und erleidet dadurch eine Unstetigkeit zweiter Art. Eine solche kommt vor bei e^z für $z = \infty$, da e^z je nach der Richtung, nach welcher z sich ins Unendliche entfernt, unendlich grofs, Null, oder auch ganz unbestimmt wird. Denn setzt man $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so wird nur r unendlich grofs, während φ die Richtung angiebt, in welcher z sich ins Unendliche entfernt. Man erhält dann

$$e^z = e^{r\cos\varphi} \cdot e^{ir\sin\varphi} = e^{r\cos\varphi}[\cos(r\sin\varphi) + i\sin(r\sin\varphi)],$$

worin der zweite Faktor stets einen endlichen Werth behält. Mit unendlich grofs werdendem r wird aber der erste Faktor unendlich grofs oder Null, je nachdem $\cos\varphi$ positiv oder negativ ist. Ist dagegen $\cos\varphi = 0$, so wird $r\cos\varphi$ und also auch der erste Faktor ganz unbestimmt. In der Funktion $e^{\frac{1}{z}}$ tritt ebenso eine Unstetigkeit zweiter Art für $z = 0$ ein.

Eine wichtige Eigenschaft, die in den Unstetigkeitsstellen zweiter Art stattfindet, ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Wenn eine Funktion $\varphi(z)$ in einem Punkte a vollkommen stetig und daher auch nicht unendlich grofs ist, so erlangt das Produkt $(z - a)\varphi(z)$ bei allen Annäherungen an den Punkt a den Werth Null. Wir zeigen nun, dafs auch das Umgekehrte gilt, dafs nämlich, wenn bei einer Funktion $\varphi(z)$ für alle Annäherungen an den Punkt a (der, wie hier immer vorausgesetzt wird, kein Verzweigungspunkt ist)

$$\lim (z - a)\varphi(z) = 0$$

ist, $\varphi(z)$ in a stetig sein mufs. Denn unter der gemachten Voraussetzung ist $(z - a)\varphi(z)$ in a stetig und kann daher für alle in der Umgebung von a befindlichen Punkte z durch eine convergirende, nach Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe dargestellt werden (§ 25). Sei

$$(z-a)\varphi(z) = p_0 + p_1(z-a) + p_2(z-a)^2 + p_3(z-a)^3 + \cdots$$

Darin bedeutet p_0 den Werth, den $(z - a)\varphi(z)$ für $z = a$ annimmt; da dieser der Voraussetzung nach Null ist, so hat man

$$(z - a)\varphi(z) = p_1(z - a) + p_2(z - a)^2 + p_3(z - a)^3 + \cdots,$$

woraus folgt

$$\varphi(z) = p_1 + p_2(z-a) + p_3(z-a)^2 + \cdots.$$

Demnach nimmt $\varphi(z)$ bei allen Annäherungen an den Punkt a den endlichen Werth p_1 an und ist also in a stetig. Wir erhalten hierdurch den Satz: Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dafs eine einwerthige Funktion $\varphi(z)$ in einem Punkte a endlich und stetig ist, ist

$$\lim (z-a)\,\varphi(z) = 0.$$

Setzt man $(z-a)\,\varphi(z) = F(z)$, so kann man diesen Satz auch in der Form aussprechen: Hat die Funktion $F(z)$ in a bei allen Annäherungen an diesen Punkt den Werth Null, so ist $\frac{F(z)}{z-a}$ in a stetig; und umgekehrt.

Hieraus folgt nun: wenn eine Funktion $\varphi(z)$ in einem Punkte $z = a$ eine nicht polare Unstetigkeit erleidet, so mufs sie bei irgend einer Art der Annäherung an a auch unendlich grofs werden. Denn erhielte $\varphi(z)$ bei verschiedenen Annäherungen an a zwar verschiedene, aber lauter endliche Werthe, so würde bei allen Annäherungen

$$\lim (z-a)\,\varphi(z) = 0$$

sein, und dann würde $\varphi(z)$ in a gar keine Unstetigkeit erleiden. Da nun auch bei einer Unstetigkeit erster Art die Funktion stets unendlich grofs wird, so kann man den vorigen Satz auch so aussprechen: Eine einwerthige Funktion kann nur unstetig werden, indem sie zugleich unendlich grofs wird; denn bei einer polaren Unstetigkeit tritt dies immer ein, bei einer nicht polaren mindestens bei einer Art der Annäherung.

In einem Unstetigkeitspunkte zweiter Art a mufs aber die Funktion auch jeden beliebig vorgeschriebenen Werth annehmen können. Denn ist c ein solcher Werth, und erleidet $\varphi(z)$ in a eine nicht polare Unstetigkeit, so gilt dasselbe auch von $\varphi(z) - c$ und auch von

$$\frac{1}{\varphi(z) - c},$$

denn diese Funktion erlangt bei verschiedenen Annäherungen an a ebenfalls verschiedene Werthe, wenn dies für $\varphi(z)$ statt hat. Da nun diese Funktion auch einmal unendlich grofs werden mufs, so mufs $\varphi(z) - c$ einmal Null, und daher $\varphi(z)$ bei irgend einer Annäherung gleich c werden.

Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern und in diesem speziellen Falle die Art der Annäherung zu bestimmen suchen, die eintreten mufs, damit eine Funktion einen vorgeschriebenen Werth erlange. Wir betrachten dazu die schon S. 106 angeführte Funktion

$$\frac{c^2}{c - e^{\frac{1}{z}}},$$

in welcher c eine beliebige Constante bedeute. Diese Funktion hat eine Unstetigkeit zweiter Art an der Stelle $z = 0$. Da sie hier auch unendlich grofs werden mufs, so mufs $e^{\frac{1}{z}}$ für $z = 0$ den beliebigen Werth c annehmen können. Wir wollen untersuchen, wann dies eintritt.

Damit nicht durch spezielle Vorkommnisse die allgemeine Natur des Vorganges verwischt werde, wollen wir c complex annehmen und setzen

$$c = h + ik,$$

worin nun h und k zwei beliebig vorgeschriebene reelle Werthe bedeuten. Setzt man dann

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so wird r bei jeder Annäherung des z an den Nullpunkt unendlich klein, während der von r mit der Abscissenaxe gebildete Winkel φ die Richtung angiebt, auf der man rückwärts dem Nullpunkte sich nähert. Man erhält nun

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = e^{\frac{\cos\varphi}{r}}\left[\cos\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) - i\sin\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right)\right];$$

und wenn dies $= h + ik$ sein soll, so müssen die Gleichungen

$$e^{\frac{\cos\varphi}{r}}\cos\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) = h, \quad e^{\frac{\cos\varphi}{r}}\sin\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) = -k$$

oder

$$e^{\frac{\cos\varphi}{r}} = \sqrt{h^2 + k^2}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) = -\frac{k}{h}$$

erfüllt werden. Nun kann $\frac{\cos\varphi}{r}$ für ein verschwindendes r nur dann nicht unendlich grofs werden, wenn φ gleichzeitig dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ sich nähert; führt man daher statt φ den Winkel

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ein, den r mit der Ordinatenaxe einschliefst, und bezeichnet mit a den reellen Werth von

$$\log \sqrt{h^2 + k^2},$$

sodafs a ebenso willkürlich vorgeschrieben ist, wie h und k, so hat man statt der vorigen Gleichungen die folgenden

$$\frac{\sin \psi}{r} = a, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\cos \psi}{r}\right) = -\frac{k}{h} \tag{1}$$

zu erfüllen. Es wird aber der ersteren sofort genügt, wenn man ψ und r gleichzeitig so unendlich klein werden läfst, dafs stets

$$\psi = ar \tag{2}$$

ist, d. h. wenn man den Punkt z auf einer durch den Werth a näher bestimmten Archimedischen Spirale, welche die Ordinatenaxe im Nullpunkte berührt, diesem Punkte sich nähern läfst.

Mit dieser zwischen ψ und r stattfindenden Beziehung wird nun $\frac{\cos \psi}{r}$ bei abnehmendem r unendlich grofs, die Tangente dieses Bogens also jedes Werthes fähig. Bezeichnet man aber mit α den bestimmten, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Bogen, dessen Tangente den Werth $-\frac{k}{h}$ hat, sodafs die willkürlich vorgeschriebenen Werthe h und k durch die ebenso willkürlichen a und α ersetzt werden können, so ist, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, auch

$$\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = -\frac{k}{h}.$$

Es wird demnach die zweite der Gleichungen (1) in Erfüllung gehen, wenn man

$$\frac{\cos \psi}{r} = \alpha + n\pi$$

annimmt, und r dadurch Null werden läfst, dafs n ins Unendliche wächst. Setzt man der Beziehung (2) gemäfs $\frac{\psi}{a}$ statt r, so ergiebt sich

$$\psi = \frac{a \cos \psi}{\alpha + n\pi},$$

wofür man, da $\cos \psi$ nur um ein unendlich Kleines der zweiten

Ordnung von 1 verschieden ist, wenn ψ und r von der ersten Ordnung unendlich klein sind, auch schreiben kann

$$\psi = \frac{a}{\alpha + n\pi}. \tag{3}$$

Es nimmt also $e^{\frac{1}{z}}$ im Nullpunkte den vorgeschriebenen Werth $c = h + ik$ an, wenn der Punkt z auf der Archimedischen Spirale $\psi = ar$ sich so gegen den Nullpunkt bewegt, dafs der Radius vektor sich sprungweise nach der Ordinatenaxe hin dreht, indem der Winkel, den er mit dieser Axe einschliefst, durch den Bruch (3) gegeben ist, dessen Zähler constant gleich a bleibt, und dessen Nenner bei jedem Sprunge um π wächst.

§ 28.

Wir werden nun zeigen, dafs eine einwerthige Funktion, die nicht eine blofse Constante ist, nothwendig in irgend einem Punkte z unendlich grofs werden mufs, indem wir den folgenden Satz beweisen: Wenn eine einwerthige Funktion für keinen endlichen oder unendlich grofsen Werth der Variablen unendlich grofs wird, so ist sie eine Constante. Man kann nämlich in diesem Falle die ganze unendliche Ebene als die Umgebung des Nullpunktes betrachten und nach (7) § 25, indem man $a = 0$ annimmt, setzen

$$\varphi(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots, \tag{1}$$

worin

$$p_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

ist. In diesem Integrale kann man ferner den Kreis um den Nullpunkt, auf den dasselbe sich bezieht, ins Unendliche sich ausdehnen lassen, ohne dafs der Werth des Integrals sich ändert, da niemals ein Unstetigkeitspunkt in den Kreis eintritt. Setzt man aber

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \quad \text{also} \quad \frac{dz}{z} = i\,d\vartheta,$$

so wird

$$p_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^n}\,d\vartheta,$$

und läfst man darin alle Werthe von z auf der Peripherie des Kreises unendlich grofs werden, so verschwindet p_n für jeden Werth von n, mit Ausnahme von $n = 0$, da $\varphi(z)$ auf der Peri-

pherie des unendlich grofsen Kreises der Annahme nach endlich bleibt. Man hat also

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = 0,$$

und die Reihe (1) reducirt sich auf ihr erstes Glied p_0, sodafs die Funktion für jeden Werth von t den constanten Werth

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\, d\vartheta$$

erhält.

Man kann den Beweis dieses Satzes auch auf die Gleichung (1) § 24, nämlich

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\, dz}{z-t}$$

stützen. Denn bezieht man dieses Integral auf einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis, so kann man diesen wegen der angenommenen Eigenschaften der Funktion $\varphi(t)$ sich ins Unendliche ausdehnen lassen. Setzt man demgemäfs

$$\frac{dz}{z} = i d\vartheta,$$

so wird

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\varphi(z)}{z-t}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{1-\frac{t}{z}}\, d\vartheta.$$

Wächst nun der Radius des Kreises ins Unendliche, so werden in dem Integrale alle Werthe von z unendlich grofs; daher verschwindet $\frac{t}{z}$, und das Integral reducirt sich auf den obigen von t unabhängigen constanten Werth

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\, d\vartheta.$$

Aus diesem Satze folgt unmittelbar: W e n n e i n e e i n w e r t h i g e F u n k t i o n n i c h t e i n e C o n s t a n t e i s t, s o m u f s s i e n o t h w e n d i g f ü r i r g e n d e i n e n e n d l i c h e n o d e r u n e n d l i c h e n W e r t h d e r V a r i a b l e n u n e n d l i c h g r o f s w e r d e n.

Weiter folgt: E i n e e i n w e r t h i g e F u n k t i o n m u f s f ü r i r g e n d e i n e n W e r t h d e r V a r i a b l e n d e n W e r t h N u l l a n-

nehmen. Denn wird $\varphi(z)$ nirgend gleich Null, so wird $\frac{1}{\varphi(z)}$ nirgend unendlich grofs, also wäre $\frac{1}{\varphi(z)}$ eine Constante, und daher auch $\varphi(z)$.

Endlich: Eine einwerthige Funktion mufs mindestens einmal jeden beliebigen Werth k annehmen können. Denn wäre $\varphi(z)$ nirgend $= k$, so wäre $\varphi(z) - k$ nirgend gleich Null, also eine Constante, und folglich wäre auch $\varphi(z)$ eine Constante.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs diese Sätze bei Ausschliefsung complexer Werthe der Variablen durchaus nicht mehr gelten. Berücksichtigt man blofs reelle Werthe der Variablen, so wird z. B. die eindeutige Funktion $\cos z$ nicht unendlich grofs und nimmt nicht jeden beliebigen Werth an, sondern nur die Werthe zwischen -1 und $+1$. Es findet daher hier eine gewisse Analogie mit den algebraischen Gleichungen statt, bei denen auch die Fundamentalsätze, dafs jede algebraische Gleichung eine Wurzel haben mufs, und dafs jede Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln hat, nicht allgemein richtig sind, wenn man nur reelle Wurzeln berücksichtigt.

§ 29.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Fälle, in denen für die Funktion $\varphi(z)$ das Produkt $(z-a)\,\varphi(z)$ im Punkte $z = a$ nicht mehr verschwindet. Dann erleidet hier $\varphi(z)$ nach § 27 eine Unstetigkeit. Es liegen nun zwei Möglichkeiten vor: entweder giebt es eine Potenz von $z - a$ mit einem positiven, ganzen oder gebrochenen Exponenten μ, für welchen das Produkt

$$(z-a)^{\mu}\,\varphi(z)$$

einen bestimmten endlichen Grenzwerth hat, oder es giebt eine solche Potenz nicht.

Wir betrachten zuerst den ersten Fall. Tritt dieser ein, so bezeichne man mit n die gröfste in μ enthaltene ganze Zahl, sodafs

$$n \leqq \mu < n + 1$$

ist, wo die Gleichheit gilt, wenn μ selbst eine ganze Zahl ist. Dann hat man

$$\lim\,(z-a)^{n+1}\,\varphi(z) = \lim\,(z-a)^{n+1-\mu}\,(z-a)^{\mu}\,\varphi(z) = 0,$$

weil $n + 1 - \mu$ positiv ist. Dividirt man aber mit $z - a$, so ist nach § 27 S. 119

$$(z-a)^{n}\,\varphi(z)$$

eine Funktion, welche für $z = a$ endlich bleibt. Bezeichnet $c^{(n)}$ den endlichen Grenzwerth derselben für $z = a$, so ist nun

$$(z - a)^n \varphi(z) - c^{(n)}$$

eine Funktion, welche für $z = a$ verschwindet, und folglich bleibt wieder nach § 27

$$(z - a)^{n-1} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{z - a}$$

für $z = a$ endlich. Bezeichnet dann $c^{(n-1)}$ den endlichen Grenzwerth derselben, so verschwindet

$$(z - a)^{n-1} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{z - a} - c^{(n-1)}$$

für $z = a$, und folglich bleibt

$$(z - a)^{n-2} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{(z - a)^2} - \frac{c^{(n-1)}}{z - a}$$

an der Stelle $z = a$ endlich. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man endlich zu einer Funktion

$$\varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} - \frac{c^{(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} - \frac{c^{(n-2)}}{(z-a)^{n-2}} - \cdots - \frac{c''}{(z-a)^2} - \frac{c'}{z-a},$$

welche für $z = a$ endlich und daher auch stetig ist. Setzt man also

$$\varphi(z) - \frac{c'}{z-a} - \frac{c''}{(z-a)^2} - \frac{c'''}{(z-a)^3} - \cdots - \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} = \psi(z),$$

so bedeutet $\psi(z)$ eine für $z = a$ endliche und stetige Funktion, und man erhält, wenn noch der Kürze wegen

$$\frac{c'}{z - a} + \frac{c''}{(z - a)^2} + \frac{c'''}{(z - a)^3} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z - a)^n} = A \qquad (1)$$

gesetzt wird,

$$\varphi(z) = A + \psi(z), \qquad (2)$$

wobei

$$c^{(n)} = \lim\, (z - a)^n \varphi(z),$$

$$c^{(n-1)} = \lim \left[(z - a)^{n-1} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{z - a}\right],$$

$$c^{(n-2)} = \lim \left[(z - a)^{n-2} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{(z - a)^2} - \frac{c^{(n-1)}}{z - a}\right],$$

u. s. w.

ist. Wenn nun die endliche Constante $c^{(n)}$ nicht den Werth Null

hat, wenn also in dem Ausdrucke A das Glied $\dfrac{c^{(n)}}{(z-a)^n}$ nicht fehlt, d. h. wenn

$\lim (z-a)^n \varphi(z)$ weder Null noch unendlich

ist, so sagt man: die Funktion $\varphi(z)$ wird für $z=a$ unendlich grofs von der $n$ten Ordnung. Dann ist aber für jeden gebrochenen Exponenten μ diese Bedingung nicht erfüllt, sondern $\lim (z-a)^\mu \varphi(z)$ wird entweder Null oder unendlich; denn ist, wie wir ursprünglich annahmen, $\mu > n$, so ist

$$\lim (z-a)^\mu \varphi(z) = \lim (z-a)^{\mu-n}(z-a)^n \varphi(z) = 0,$$

ist aber $\mu < n$, so ist

$$\lim (z-a)^\mu \varphi(z) = \lim \frac{(z-a)^n \varphi(z)}{(z-a)^{n-\mu}} = \infty.$$

Folglich kann $\varphi(z)$ nicht von einer gebrochenen Ordnung unendlich werden, und wir erhalten den Satz: Wenn eine einwerthige Funktion von einer endlichen Ordnung unendlich grofs wird, so kann sie nur von einer ganzen Ordnung unendlich grofs werden.

In diesem Falle ist nun die Unstetigkeit immer eine polare, denn setzt man

$$(z-a)^n \varphi(z) = F(z),$$

so nimmt $F(z)$ bei allen Annäherungen an a einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Werth an, und folglich erhält

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{(z-a)^n}{F(z)}$$

bei allen Annäherungen an a den Werth Null. (S. 117.)

Hieraus folgt ferner, dafs, wenn $\varphi(z)$ für $z=a$ von der $n$ten Ordnung unendlich grofs ist, man setzen kann

$$\varphi(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^n},$$

worin $F(z)$ für $z=a$ endlich und von Null verschieden ist; und umgekehrt.

Diese Form, die man in dem betrachteten Falle der Funktion $\varphi(z)$ geben kann, berechtigt dazu, dafs ein Unendlichwerden von der $n$ten Ordnung als ein Zusammenfallen von n Punkten, in denen $\varphi(z)$ von der ersten Ordnung unendlich ist, oder als ein n-maliges Unendlichwerden angesehen werden kann. Denn wird

$\varphi(z)$ etwa in zwei Punkten a und b unendlich von der ersten Ordnung, so kann man nach dem Obigen setzen

$$\varphi(z) = \frac{F(z)}{z - a},$$

worin $F(z)$ für $z = a$ nicht, wohl aber für $z = b$, und hier von der ersten Ordnung unendlich ist. Demnach hat man weiter

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{z - b}, \qquad \varphi(z) = \frac{F_1(z)}{(z - a)(z - b)},$$

worin nun $F_1(z)$ weder in a, noch in b unendlich oder Null ist. Fallen jetzt die Punkte a und b zusammen, so entsteht

$$\varphi(z) = \frac{F_1(z)}{(z - a)^2},$$

und folglich ist dann $\varphi(z)$ nach dem obigen Kennzeichen in a von der zweiten Ordnung unendlich grofs.

Wir sahen oben, dafs, wenn eine Funktion $\varphi(z)$ in $z = a$ von einer endlichen Ordnung unendlich grofs ist, sie hier eine Unstetigkeit erster Art erleidet; wir zeigen nun, dafs auch das Umgekehrte gilt. Ist nämlich $\varphi(z)$ in $z = a$ polar unstetig, so ist $\frac{1}{\varphi(z)}$ hier stetig und hat an dieser Stelle den Werth Null. Man kann daher nach § 25 (7) setzen

$$\frac{1}{\varphi(z)} = p_1(z - a) + p_2(z - a)^2 + \cdots + p_n(z - a)^n + \cdots, \tag{3}$$

denn das erste Glied p_0 mufs fehlen, da es den Werth hat, den $\frac{1}{\varphi(z)}$ für $z = a$ annimmt, und dieser Null ist. Von den folgenden Coefficienten können möglicherweise auch einige Null sein, der erste, der nicht verschwindet, sei p_n. Ein solcher mufs vorhanden sein, sonst wäre $\frac{1}{\varphi(z)}$ constant und hätte für jedes z den Werth Null. Es sei demnach

$$\frac{1}{\varphi(z)} = p_n(z - a)^n + p_{n+1}(z - a)^{n+1} + \cdots,$$

worin also p_n von Null verschieden und endlich ist. Bringt man dies nun in die Form

$$\frac{1}{\varphi(z)} = (z - a)^n [p_n + p_{n+1}(z - a) \cdots]$$

und setzt

$$\frac{1}{p_n + p_{n+1}(z-a) + \cdots} = F(z),$$

so wird

$$\varphi(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^n};$$

da aber $F(z)$ für $z = a$ den endlichen und von Null verschiedenen Werth $\frac{1}{p_n}$ erhält, so wird $\varphi(z)$ nach dem obigen Kennzeichen von der $n$ten Ordnung, also von einer endlichen Ordnung unendlich grofs*).

Demnach ist die Eigenschaft einer Funktion, für einen Punkt a von einer endlichen Ordnung unendlich grofs zu werden, für das Eintreten einer polaren Unstetigkeit charakteristisch.

Hieraus geht zugleich hervor, dafs der S. 117 (Note) erwähnte Fall, dafs $\varphi(z)$ in a bei verschiedenen Annäherungen an diesen Punkt zwar immer unendlich grofs, aber von verschiedenen Ordnungen unendlich grofs wird, in der That nicht möglich ist, sondern einen Widerspruch involvirt. In diesem Falle würde nämlich $\frac{1}{\varphi(z)}$ bei allen Annäherungen an a den Werth Null erhalten. Dann aber wird, wie eben gezeigt wurde, $\varphi(z)$ von einer bestimmten Ordnungszahl unendlich grofs, welche durch denjenigen Coefficienten angegeben wird, der in (3) der erste ist, der nicht verschwindet.

Wir fassen jetzt die S. 124 erwähnte zweite Möglichkeit ins Auge, dafs es keine Potenz von $(z-a)$ mit einem endlichen positiven Exponenten μ giebt, für welche das Produkt $(z-a)^\mu \varphi(z)$ für alle Annäherungen an a einen endlichen Werth erlangt. Nach dem Vorigen kann dies nur bei einer Unstetigkeit der zweiten Art eintreten. Nun gilt aber auch für die letztere die § 26 (10) abgeleitete Reihe, denn bei dieser konnte die in a stattfindende Unstetigkeit eine ganz beliebige sein, da der Punkt a mittelst eines kleinen Kreises C ausgeschlossen wurde. Setzt man in § 26 (10)

$$p_0 + p_1(z-a) + p_2(z-a)^2 + \cdots = \psi(z),$$

sodafs $\psi(z)$ eine für $z = a$ endliche und stetige Funktion bedeutet, so erhält man

*) *Königsberger*, Vorlesungen über die Theorie der ell. Funkt. I. S. 121.

$$\varphi(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \frac{c'''}{(z-a)^3} + \cdots + \psi(z). \quad (4)$$

Darin war nach (9) § 26

$$c^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z)\,(z-a)^n\,dz,$$

das Integral auf den um a beschriebenen Kreis C erstreckt. Führt man darin

$$z - a = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \qquad \frac{dz}{z-a} = i\,d\vartheta$$

ein, so wird

$$c^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\,(z-a)^{n+1}\,d\vartheta.$$

Wenn nun, um zunächst den früheren Fall von diesem Gesichtspunkte aus zu betrachten, $\varphi(z)$ für $z = a$ von der $n$ten Ordnung unendlich grofs ist, so ist $\varphi(z)\,(z-a)^n$ in a endlich, also $\varphi(z)\,(z-a)^{n+1}$ Null. Es verschwindet daher, wenn man den Radius des Kreises C bis zum Verschwinden abnehmen läfst, $c^{(n+1)}$ und um so mehr alle späteren Coefficienten $c^{(n+2)}$, $c^{(n+3)}, \cdots$. Die in (4) enthaltene Reihe bricht demnach bei dem Gliede $\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}$ ab und verwandelt sich in den früher unter (1) gefundenen Ausdruck A. Tritt dagegen die vorhin erwähnte zweite Möglichkeit ein, bei welcher $\varphi(z)\,(z-a)^n$ für keinen endlichen Werth von n einen endlichen Grenzwerth hat, so verschwindet keiner der Coefficienten $c^{(n)}$, und an Stelle des früheren Ausdrucks A tritt die in (4) enthaltene unendliche Reihe. In diesem Falle ist nun $\varphi(z)$ für $z = a$ von unendlich hoher Ordnung unendlich grofs, und zugleich, wie oben bemerkt, die Unstetigkeit in a von der zweiten Art.

Demnach sind die beiden Arten der Unstetigkeit auch dadurch charakterisirt, dafs bei der ersten ein unendlich grofs Werden von endlicher Ordnung, bei der zweiten von unendlich hoher Ordnung stattfindet.

Wir kehren nun zu der Gleichung (2)

$$\varphi(z) = A + \psi(z)$$

zurück, in welcher A entweder die endliche Reihe (1)

$$A = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}$$

oder nach (4) eine unendliche Reihe von derselben Form, $\psi(z)$ aber eine in a endliche und stetige Funktion bedeutet. Diese Gleichung zeigt, dafs eine einwerthige Funktion $\varphi(z)$, welche an einer Stelle $z = a$ unendlich grofs wird, sich an dieser Stelle von einer dort endlich bleibenden Funktion $\psi(z)$ stets nur um einen Ausdruck von der Form A unterscheidet. Sie wird daher nur so unendlich wie dieser Ausdruck A. Ist z. B. $\varphi(z)$ für $z = a$ von der ersten Ordnung unendlich, sodafs $\lim (z - a)\, \varphi(z)$ endlich und von Null verschieden ist, so kann man auch sagen, $\varphi(z)$ wird dort unendlich wie $\frac{c'}{z - a}$. Oder ist $\varphi(z)$ für $z = a$ unendlich von der zweiten Ordnung, so ist sie entweder unendlich wie $\frac{c'}{z - a} + \frac{c''}{(z - a)^2}$ oder nur wie $\frac{c''}{(z - a)^2}$ allein. Hat man eine andere einwerthige Funktion $f(z)$, welche für $z = a$ ebenfalls von der $n$ten Ordnung unendlich wird, so kann diese auch nur so unendlich werden, wie ein ähnlicher Ausdruck A, der sich von dem vorigen nur in den Werthen der Coefficienten c unterscheiden kann. Ist die letztere Funktion $f(z)$ gegeben, so sind damit auch die Coefficienten c gegeben, und folglich ist $\varphi(z)$ an einer Unstetigkeitsstelle a bekannt, wenn eine Funktion $f(z)$ gegeben ist, die an dieser Stelle ebenso unendlich wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Man kann alsdann setzen

$$\varphi(z) = f(z) + \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und stetig bleibt.

Aus der Gleichung $\varphi(z) = A + \psi(z)$ folgt durch Differentiation

$$\varphi'(z) = \frac{dA}{dz} + \psi'(z),$$

wo

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{c'}{(z-a)^2} - \frac{2c''}{(z-a)^3} - \frac{3c'''}{(z-a)^4} - \cdots - \frac{n \,.\, c^{(n)}}{(z-a)^{n+1}}.$$

Da nun (nach § 24) $\psi'(z)$ für $z = a$ endlich bleibt, weil $\psi(z)$ hier endlich ist, so folgt, dafs die Derivirte $\varphi'(z)$ einer einwerthigen Funktion $\varphi(z)$ an einer Stelle $z = a$, wo $\varphi(z)$ unendlich ist, ebenfalls unendlich wird, und zwar von einer um Eins höheren Ordnung wie $\varphi(z)$. In allen endlichen Punkten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, bleibt dagegen (nach § 24) auch $\varphi'(z)$ endlich, und daher sind die endlichen Un-

stetigkeitspunkte einer einwerthigen Funktion $\varphi(z)$ mit denen ihrer Derivirten $\varphi'(z)$ identisch.

§ 30.

Wir gehen nun zu der Untersuchung über, wie sich eine einwerthige Funktion $\varphi(z)$ für einen unendlich grofsen Werth der Variablen z verhält. Diese Betrachtung können wir auf die vorige zurückführen, indem wir $z = \frac{1}{u}$ setzen, wodurch $\varphi(z)$ in $f(u)$ übergehen möge, und dann $f(u)$ an der Stelle $u = 0$ untersuchen. Nun ist zuerst (nach § 27) $f(u)$ für $u = 0$ endlich, wenn $[\lim uf(u)]_{u=0} = 0$ ist. Also ist

$\varphi(z)$ für $z = \infty$ endlich, wenn $\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z}\right]_{z=\infty} = 0$

ist. Ferner wird (nach § 29) $f(u)$ für $u = 0$ von der $n$ten Ordnung oder n Mal unendlich, wenn $[\lim u^n f(u)]_{u=0}$ weder Null noch unendlich ist. Daher wird

$\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich von der $n$ten Ordnung, wenn

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty}$$

weder Null noch unendlich

ist. Man kann ferner nach § 29 in diesem Falle setzen:

$$f(u) = \frac{Q'}{u} + \frac{Q''}{u^2} + \frac{Q'''}{u^3} + \cdots + \frac{Q^{(n)}}{u^n} + \lambda(u),$$

wo $\lambda(u)$ eine für $u = 0$ endlich bleibende Funktion, und die Gröfsen Q constante Coefficienten bedeuten. Geht $\lambda(u)$, durch z ausgedrückt, in $\psi(z)$ über, so erhält man hieraus

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + Q^{(n)}z^n + \psi(z), \quad (1)$$

worin $\psi(z)$ für $z = \infty$ endlich bleibt. In diesem Falle ist also $\varphi(z)$ unendlich wie eine ganze Funktion von z.

Aus der Gleichung (1) folgt

$$\varphi'(z) = Q' + 2Q''z + 3Q'''z^2 + \cdots + nQ^{(n)}z^{n-1} + \psi'(z). \quad (2)$$

Um nun zuerst zu untersuchen, wie sich die Derivirte $\psi'(z)$ der endlich bleibenden Funktion $\psi(z)$ im Unendlichen verhält, benutzen wir wieder die Variable u. Da

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -u^2$$

ist, und

$$\psi(z) = \lambda(u)$$

war, so ist

$$\psi'(z) = -u^2\lambda'(u).$$

Nun ist $\lambda(u)$ endlich für $u = 0$, also nach § 24 auch $\lambda'(u)$, und folglich wird

$$\psi'(z) = 0 \text{ für } z = \infty.$$

Wenn also eine einwerthige Funktion im Punkte $z = \infty$ endlich ist, so ist ihre Derivirte in diesem Punkte gleich Null*).

Alsdann folgt aus (2), dafs $\varphi'(z)$ für $z = \infty$ von einer um Eins niedrigeren Ordnung unendlich grofs wird, als $\varphi(z)$. Ist also $\varphi(z)$ nur von der ersten Ordnung unendlich grofs, so bleibt $\varphi'(z)$ endlich für $z = \infty$.

Die in (1) auftretende ganze Funktion von z kann auch aus der § 26 (13) gefundenen Reihe hergeleitet werden, welche gilt, wenn $\varphi(z)$ für $z = \infty$ eine Unstetigkeit beliebiger Art erleidet; sie gilt dann für alle Punkte z, die aufserhalb eines Kreises liegen, der alle endlichen Unstetigkeitspunkte einschliefst. Bezeichnet man den ersten Theil derselben mit $\psi(z)$, setzt man nämlich

$$\psi(z) = p_0 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \frac{p_3}{z^3} + \cdots,$$

so bleibt diese Funktion für $z = \infty$ endlich und nimmt den Werth p_0 an. Man erhält also, wenn man die Coefficienten mit Q statt mit c bezeichnet, aus § 26 (13)

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + \psi(z), \tag{3}$$

und darin ist nach § 26 (12)

$$Q^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

worin das Integral sich auf einen Kreis um den Nullpunkt bezieht, aufserhalb dessen kein Unstetigkeitspunkt aufser $z = \infty$ sich befindet. Führt man darin $\frac{dz}{z} = i d\vartheta$ ein, so erhält man

*) Und zwar mindestens von der zweiten Ordnung. (Vgl. § 34.)

$$Q^{(n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^n}\, d\vartheta.$$

Ist nun $\varphi(z)$ für $z = \infty$ von der $n$ten Ordnung unendlich grofs, so ist $\lim \dfrac{\varphi(z)}{z^n}$ endlich, also $\lim \dfrac{\varphi(z)}{z^{n+1}}$ Null. Läfst man demnach den Integrationskreis immer gröfser und gröfser werden, so verschwinden $Q^{(n+1)}$, $Q^{(n+2)}$, u. s. w., und die in (3) enthaltene Reihe geht in die ganze Funktion in (1) über.

Wenn aber $\varphi(z)$ für $z = \infty$ von unendlich hoher Ordnung unendlich ist, also eine Unstetigkeit zweiter Art erleidet, so tritt an Stelle der ganzen Funktion in (1) die nach ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe in (3).

§ 31.

Aus dem Vorigen ergeben sich nun folgende Sätze: **Wenn eine einwerthige Funktion für keinen endlichen Werth von z, sondern nur für $z = \infty$, und auch hier nur von endlicher Ordnung (n Mal) unendlich wird, so ist sie eine ganze Funktion $n$ten Grades.** Denn man hat in diesem Falle nach § 30 (1)

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + Q^{(n)}z^n + \psi(z);$$

da nun aber $\psi(z)$ eine einwerthige Funktion ist, welche weder für einen endlichen noch für einen unendlichen Werth von z unendlich grofs wird, so ist sie nach § 28 eine Constante. Bezeichnet man dieselbe mit Q, so folgt

$$\varphi(z) = Q + Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots Q^{(n)}z^n,$$

also ist in der That $\varphi(z)$ eine ganze Funktion $n$ten Grades. Umgekehrt wird auch eine ganze Funktion $n$ten Grades $\varphi(z)$ nur für $z = \infty$ und hier n Mal unendlich; denn es ist

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty} = Q^{(n)},$$

also endlich, und zugleich von Null verschieden, wenn $\varphi(z)$ nicht von niedrigerem Grade ist, als vom $n$ten.

Wird eine einwerthige Funktion $\varphi(z)$ nur für $z = \infty$ unendlich grofs, aber von unendlich hoher Ordnung, so läfst sie sich nach Potenzen von z in eine für jeden Werth von z convergirende Reihe entwickeln. Denn in

diesem Falle gilt die Reihe (3) § 30 für alle endlichen Werthe von z, und $\psi(z)$ mufs aus demselben Grunde wie oben eine Constante sein.

§ 32.

Wenn eine einwerthige Funktion nur für eine endliche Anzahl von Werthen der Variablen und für jeden nur von endlicher Ordnung unendlich grofs wird, (kurz, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird), so ist sie eine rationale Funktion.

Seien $a, b, c, \ldots k, l, \infty$ die Werthe von z, für welche $\varphi(z)$ unendlich wird, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda, \mu$ die resp. Ordnungszahlen des Unendlichwerdens; so kann man zuerst setzen

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + \cdots + Q^{(\mu)}z^\mu + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = \infty$ nicht, also nur noch für $z = a, b, \cdots l$ unendlich wird; demnach hat man

$$\psi(z) = \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nur noch für $b, c, \cdots l$ unendlich ist. Man hat also weiter

$$\psi_1(z) = \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \cdots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} + \psi_2(z).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man zu

$$\psi_{n-1}(z) = \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \cdots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda} + \psi_n(z),$$

wo $\psi_n(z)$ gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Bezeichnet man diese mit Q, so erhält man, indem man die obigen Ausdrücke zusammensetzt,

$$\begin{aligned}\varphi(z) = Q &+ Q'z + Q''z^2 + \cdots + Q^{(\mu)}z^\mu \\ &+ \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} \\ &+ \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \cdots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \cdots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda},\end{aligned}$$

also in der That eine rationale Funktion.

Da eine rationale Funktion immer auf die obige Form gebracht, nämlich in eine ganze Funktion und Partialbrüche zerlegt werden kann, so folgt auch umgekehrt, dafs eine rationale Funktion stets nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich grofs wird.

§ 33.

Eine einwerthige Funktion $\varphi(z)$ ist bis auf eine additive Constante bestimmt, sobald für jeden Unstetigkeitspunkt eine Funktion gegeben ist, welche übrigens endlich und stetig bleibt, aber an der betreffenden Unstetigkeitsstelle ebenso unendlich wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Seien a_1, a_2, a_3, u. s. w. die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(z)$, und denken wir uns darunter den Werth ∞ gleich mit begriffen. Ferner seien $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, u. s. w. gegebene Funktionen, welche überall endlich und stetig sind, nur resp. in den Punkten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ unendlich grofs werden. Wenn dann $\varphi(z)$ in a_1 so unendlich werden soll wie $f_1(z)$, so kann man setzen

$$\varphi(z) = f_1(z) + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ nicht unendlich wird. Da nun $f_1(z)$ für $z = a_2$ endlich ist, so mufs $\psi(z)$ hier unendlich werden, und zwar so wie $\varphi(z)$. Soll daher $\varphi(z)$ in a_2 so unendlich werden, wie $f_2(z)$, so kann man setzen

$$\psi(z) = f_2(z) + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nicht für a_1 und a_2, sondern nur noch für a_3 u. s. w. unendlich wird. Fährt man so fort, so gelangt man endlich zu einer Funktion ψ, die gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Wird diese mit C bezeichnet, so erhält man

$$\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + C.$$

§ 34.

Man sagt, eine einwerthige Funktion $\varphi(z)$ wird für einen Werth von z unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung, wenn $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ für diesen Werth unendlich grofs von der $n$ten Ordnung wird. Für diesen Fall ist nach § 29 und 30

$$\left.\begin{array}{ll}\text{für } z = a & \lim \dfrac{(z-a)^n}{\varphi(z)} \\ \text{„ } z = \infty & \lim \dfrac{1}{z^n \varphi(z)}\end{array}\right\} \text{weder Null noch unendlich grofs.}$$

Da nun auch die umgekehrten Brüche endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben müssen, so haben wir als Bedingungen dafür, dafs $\varphi(z)$ für $z = \infty$ oder für einen endlichen Werth $z = a$ unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung ist:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{für } z = a & \lim \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n} \\ \text{„ } z = \infty & \lim z^n \varphi(z)\end{array}\right\} \text{weder Null noch unendlich grofs.}$$

Aus diesen Bedingungen entstehen die früheren für das unendlich grofs Werden, wenn $-n$ an die Stelle von n tritt, daher kann man auch ein unendlich grofs Werden als ein unendlich klein Werden von negativer Ordnung betrachten, oder auch umgekehrt.

Wird $\varphi(z)$ für $z = a$ Null von der $n$ten Ordnung, und setzt man

$$\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} = F(z),$$

so ist nach dem Obigen $F(z)$ eine Funktion, welche für $z = a$ endlich und von Null verschieden ist. Hieraus folgt, dafs man

$$\varphi(z) = (z-a)^n F(z)$$

setzen, also aus $\varphi(z)$ den Faktor $(z-a)^n$ herausziehen kann. Setzt man $-n$ an die Stelle von n, so kommt man wieder auf die S. 126 erwähnte Bedingung zurück, dafs nämlich, wenn $\varphi(z)$ für $z = a$ von der $n$ten Ordnung unendlich grofs ist,

$$\varphi(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^n}$$

gesetzt werden kann; und umgekehrt.

Wird $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich klein von der $n$ten Ordnung, so ist

$$z^n \varphi(z) = F(z)$$

für $z = \infty$ endlich und von Null verschieden, und diese Gleichung gilt auch zugleich für das unendlich grofs Werden, wenn $-n$ an Stelle von n gesetzt wird. Daher kann man in diesem Falle beim unendlich klein Werden von $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \frac{F(z)}{z^n}$$

und beim unendlich grofs Werden

$$\varphi(z) = z^n F(z)$$

setzen, wo $F(z)$ eine für $z = \infty$ endlich und von Null verschieden bleibende Funktion bedeutet.

§ 35.

Hieran knüpft sich die Untersuchung, wie oft eine einwerthige Funktion in einem Gebiete unendlich klein oder grofs von der ersten Ordnung wird, wobei ein unendlich Werden von der $n$ten Ordnung als n-maliges unendlich Werden von der ersten Ordnung aufgefafst wird. Diese Anzahl kann nämlich durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden*). Innerhalb eines Gebietes T werde die einwerthige Funktion $\varphi(z)$ in den Punkten a_1, a_2, a_3, u. s. w. unendlich klein oder grofs, und zwar resp. von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, u. s. w., die für ein unendlich klein Werden positiv, für ein unendlich grofs Werden negativ zu nehmen seien. Wir betrachten nun das Integral

$$\int d \log \varphi(z) \text{ oder } \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz,$$

bezogen auf die ganze Begrenzung von T. Die Funktion $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ wird unendlich grofs für alle Punkte, in denen $\varphi(z)$ Null, und für alle diejenigen, in denen $\varphi'(z)$ unendlich grofs ist. Nach § 24 bleibt aber $\varphi'(z)$ endlich in allen Punkten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, und wird nach § 29 in allen denen unendlich, in denen $\varphi(z)$ es ist; daher sind die Unstetigkeitspunkte von $\varphi'(z)$ innerhalb T identisch mit denen von $\varphi(z)$. Demnach wird $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ unendlich grofs für die sämmtlichen Punkte a_1, a_2, a_3, u. s. w., und nur für diese. Nach § 19 ist nun das obige auf die Begrenzung von T bezogene Integral gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf kleine, um die Punkte a beschriebene Kreise. Sei A eines dieser Integrale entsprechend dem Punkte a, bei welchem die Ordnung des unendlich Werdens gleich n sei. Dann kann man nach § 34 setzen

*) Dies findet sich schon bei *Cauchy*, Comptes rendus Bd. 40. 1855. I. Mémoire sur les variations intégrales des fonctions, pag. 656.

$$\varphi(z) = (z - a)^n \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und von Null verschieden bleibt. Hieraus folgt

$$A = \int d \log \varphi(z) = n \int \frac{dz}{z - a} + \int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz,$$

die Integrale auf einen kleinen um a beschriebenen Kreis ausgedehnt. Da nun innerhalb des Integrationskreises $\psi(z)$ nicht Null und $\psi'(z)$ nicht unendlich grofs ist, so ist $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ stetig und daher (§ 18)

$$\int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz = 0.$$

Aufserdem ist (§ 20)

$$\int \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$$

und daher

$$A = 2\pi i n.$$

Summirt man diese Werthe für alle Punkte a, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i (n_1 + n_2 + n_3 + \cdots) = 2\pi i \Sigma n,$$

das Integral auf die Begrenzung von T ausgedehnt, und hierin giebt Σn an, wie oft $\varphi(z)$ innerhalb T unendlich grofs oder klein von der ersten Ordnung wird, wenn man ein unendlich Werden $n$ter Ordnung als n-maliges unendlich Werden erster Ordnung ansieht. Wir haben also den Satz: Das Integral

$$\int d \log \varphi(z)$$

einer einwerthigen Funktion $\varphi(z)$, bezogen auf die Begrenzung eines Gebietes T, ist gleich $2\pi i$ Mal der Anzahl der Punkte, in denen $\varphi(z)$ innerhalb T unendlich klein oder grofs von der ersten Ordnung ist.

Bezieht man den Buchstaben n auf das unendlich klein Werden und deutet die Ordnungszahlen des unendlich grofs Werdens durch $-\nu$ an, da sie negativ zu nehmen sind, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i (\Sigma n - \Sigma \nu). \tag{1}$$

Wenn die Funktion $\varphi(z)$ innerhalb T endlich bleibt, so fällt aus der vorigen Formel das Glied $-\Sigma\nu$ fort, und die Anzahl der Punkte, in denen eine einwerthige Funktion $\varphi(z)$ Null

von der ersten Ordnung ist innerhalb eines Gebietes T, in welchem $\varphi(z)$ stetig bleibt, ist gleich

$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log \varphi(z),$$

das Integral auf die Begrenzung von T bezogen.

§ 36.

Wenn man nun unter den Punkten a alle endlichen Punkte versteht, in denen $\varphi(z)$ unendlich klein oder grofs ist, so kommt es noch darauf an, wie sich $\varphi(z)$ für $z = \infty$ verhält. Nehmen wir an, $\varphi(z)$ werde für $z = \infty$ m Mal unendlich, und zwar beziehe sich wieder ein positives m auf das unendlich klein, ein negatives m auf das unendlich grofs Werden. Nimmt man dann als Begrenzung von T einen Kreis um den Nullpunkt, welcher die sämmtlichen Punkte a umgiebt, so ist zunächst nach dem Vorigen auf diesen Kreis bezogen

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i\,(\Sigma n - \Sigma \nu). \tag{1}$$

Führt man nun aber statt z eine neue Variable u durch die Beziehung

$$z = \frac{1}{u}$$

ein, so entspricht jedem Punkte z ein Punkt u, und dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $u = 0$. Setzt man ferner

$$z = r\,(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

so wird

$$u = \frac{1}{r}\,(\cos \vartheta - i \sin \vartheta).$$

Beschreibt nun z eine geschlossene Linie Z um den Nullpunkt, so beschreibt u, weil dabei ϑ von 0 bis 2π wächst, ebenfalls eine geschlossene Linie U um den Nullpunkt, aber in umgekehrter Richtung. Läfst man ferner bei constantem ϑ den Radius Vector r wachsen, so nimmt $\frac{1}{r}$ ab und umgekehrt, folglich entsprechen allen Punkten z aufserhalb Z Punkte u, die innerhalb U liegen. Führt man jetzt in dem Integrale

$$\int d \log \varphi(z) \quad \text{oder} \quad \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$$

u statt z ein, indem man die aus $\varphi(z)$ dadurch hervorgehende Funktion mit $f(u)$ bezeichnet, so erhält man

$$\int d \log f(u) \quad \text{oder} \quad \int \frac{f'(u)}{f(u)} du.$$

In dem Integrale nach z ist die Integrationscurve Z ein alle Punkte a umschliefsender Kreis um den Nullpunkt, also ist in dem Integrale nach u die Integrationscurve auch ein Kreis um den Nullpunkt, der aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Nimmt man daher bei beiden Integralen die Integration in der Richtung der wachsenden Winkel, so ist

$$\int d \log \varphi(z) = - \int d \log f(u),$$

das erste Integral auf den Kreis Z, das zweite auf den Kreis U bezogen. Der Kreis Z umgiebt alle Punkte a, also wird $\varphi(z)$ aufserhalb Z nur unendlich für $z = \infty$, und daher $f(u)$ innerhalb U nur unendlich für $u = 0$. Für $z = \infty$ war $\varphi(z)$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, sodafs

$$\left[\lim z^m \varphi(z)\right]_{z=\infty} = \left[\lim \frac{f(u)}{u^m}\right]_{u=0}$$

endlich und von Null verschieden ist; demnach ist auch $f(u)$ für $u = 0$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, und setzt man

$$f(u) = u^m \psi(u),$$

so bedeutet $\psi(u)$ eine Funktion, welche in $u = 0$, also überall innerhalb U endlich und von Null verschieden ist. Nun folgt wieder

$$\int d \log f(u) = m \int \frac{du}{u} + \int \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} du,$$

worin das zweite Integral verschwindet, und das erste, in der Richtung der wachsenden Winkel genommen, $= 2\pi i m$ ist. Demnach erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = - \int d \log f(u) = - 2\pi i m.$$

Vergleicht man dies Resultat mit dem unter (1) gefundenen Werthe dieses auf dieselbe Curve bezogenen Integrales, so ergiebt sich

$$(2) \qquad \Sigma n - \Sigma \nu = - m.$$

Ist nun $\varphi(z)$ für $z = \infty$ Null, so ist m positiv, und man erhält

$$m + \Sigma n = \Sigma \nu;$$

ist aber $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich grofs, so ist m negativ; schreibt man $-\mu$ dafür, so folgt

$$\Sigma n = \mu + \Sigma \nu.$$

In beiden Gleichungen giebt dann die linke Seite an, wie oft $\varphi(z)$ in der ganzen unendlichen Ebene Null von der ersten Ordnung, und die rechte Seite, wie oft diese Funktion unendlich grofs von der ersten Ordnung wird, und wir erhalten den Satz: Eine einwerthige Funktion wird in der ganzen unendlichen Ebene ebenso oft Null wie unendlich grofs. Daraus folgt sogleich: Eine einwerthige Funktion nimmt jeden beliebigen Werth k ebenso oft an, als sie unendlich grofs wird. Denn $\varphi(z) - k$ wird ebenso unendlich grofs wie $\varphi(z)$, daher wird $\varphi(z) - k$ ebenso oft Null, als $\varphi(z)$ unendlich grofs wird, und folglich $\varphi(z)$ ebenso oft gleich k.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Fundamentalsatz der Algebra, denn eine ganze Funktion $n$ten Grades wird nur für $z = \infty$ unendlich grofs und zwar n Mal, folglich mufs sie auch n Mal Null werden, und daher mufs eine Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln haben.

§ 37.

Man kann nun den schon im § 32 bewiesenen Satz, dafs eine einwerthige Funktion, welche nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich grofs wird, eine rationale Funktion sein mufs, aufs Neue und in einer andern Form beweisen.

Seien a_1, a_2, a_3, u. s. w. die endlichen Werthe von z, für welche die einwerthige Funktion $\varphi(z)$ unendlich klein oder grofs wird, und mögen resp. n_1, n_2, n_3, u. s. w. die Ordnungszahlen des Unendlichwerdens bedeuten, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich grofs Werden. Dann kann man zuerst nach § 34

$$\varphi(z) = (z - a_1)^{n_1} \psi(z)$$

setzen, wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ endlich und von Null verschieden ist, aber für $z = a_2$, a_3, u. s. w. unendlich wird. Alsdann ist

$$\psi(z) = (z - a_2)^{n_2} \psi_1(z),$$

wo nun

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - a_1)^{n_1} (z - a_2)^{n_2}}$$

für a_1 und a_2 nicht, wohl aber für a_3, u. s. w. unendlich wird; fährt man so fort, so gelangt man zu einer Funktion

$$\lambda(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}(z-a_3)^{n_3}\cdots} = \frac{\varphi(z)}{\Pi(z-a)^n},$$

welche für keinen endlichen Werth von z mehr unendlich wird. Von dieser kann nun aber gezeigt werden, dafs sie auch für $z = \infty$ nicht unendlich grofs werden kann. Da nämlich

$$(z-a)^n = z^n\left(1-\frac{a}{z}\right)^n$$

ist, so kann man schreiben

$$\Pi(z-a)^n = z^{\Sigma n}\,\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n.$$

Bezeichnet aber m die Anzahl, wie oft $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich wird, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich grofs Werden, so ist (§ 36 (2))

$$\Sigma n = -m,$$

da hier Σn dasselbe bedeutet, was dort mit $\Sigma n - \Sigma \nu$ bezeichnet worden ist. Demnach hat man

$$\Pi(z-a)^n = z^{-m}\,\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n.$$

und

$$\lambda(z) = \frac{z^m\varphi(z)}{\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n}.$$

Für $z = \infty$ aber ist

$$\lim \frac{z^m\varphi(z)}{\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n} = \lim z^m\varphi(z),$$

und dies ist nach § 34 endlich und von Null verschieden, da $\varphi(z)$ für $z = \infty$ von der $m$ten Ordnung unendlich klein wird. Folglich ist $\lambda(z)$ in der That eine Funktion, welche für $z = \infty$ endlich bleibt; da sie nun auch für keinen endlichen Werth von z unendlich grofs wird, so mufs sie nach § 28 eine Constante sein. Bezeichnet man diese mit C, so ist

$$\varphi(z) = C\,\Pi(z-a)^n.$$

Behält man nun a_1, a_2, a_3, u. s. w. für die endlichen Werthe von z bei, für welche $\varphi(z)$ verschwindet, resp. von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, u. s. w.; und bezeichnet mit α_1, α_2, α_3, u. s. w. die endlichen Werthe, für welche $\varphi(z)$ unendlich grofs wird, resp. von den Ordnungen ν_1, ν_2, ν_3, u. s. w., so ist

$$\varphi(z) = C\frac{(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}(z-a_3)^{n_3}\cdots\cdot}{(z-\alpha_1)^{\nu_1}(z-\alpha_2)^{\nu_2}(z-\alpha_3)^{\nu_3}\cdots\cdot}.$$

Demnach ist $\varphi(z)$ wirklich eine rationale Funktion, und zwar erscheint sie hier im Zähler und Nenner in Faktoren aufgelöst, während sie in § 32 in Partialbrüche und eine ganze Funktion zerlegt war.

Hieraus folgt ferner: Eine einwerthige Funktion ist bis auf einen constanten Faktor bestimmt, sobald man alle endlichen Werthe kennt, für welche sie unendlich klein und unendlich grofs wird, und von jedem auch die Ordnungszahl des Unendlichwerdens; und: Zwei einwerthige Funktionen, welche in diesen Werthen und in den Ordnungszahlen übereinstimmen, sind bis auf einen constanten Faktor einander gleich.

B. Funktionen mit Verzweigungspunkten. Algebraische Funktionen.

§ 38.

Eine algebraische Funktion w von z ist definirt durch eine algebraische Gleichung, in welcher die Coefficienten der Potenzen von w rationale Funktionen von z sind, also durch eine Gleichung von der Form

$$w^p - f_1(z)\,w^{p-1} + f_2(z)\,w^{p-2} - \cdots\cdot + (-1)^p f_p(z) = 0, \quad (1)$$

worin $f_1(z), f_2(z) \cdots\cdot$ rationale Funktionen von z bedeuten, und bei welcher wir annehmen wollen, dafs die höchste Potenz von w den Coefficienten Eins habe. Bezeichnet man bei irgend einem angenommenen Werthe von z mit $w_1, w_2, \cdots\cdot w_p$ die p Wurzeln dieser Gleichung, so sind dies die p Werthe, welche die Funktion für den betrachteten Werth von z annehmen kann.

Von diesen mufs nun mindestens einer für irgend einen endlichen oder unendlich grofsen Werth von z unendlich grofs werden. Denn es ist

$$w_1 + w_2 + \cdots\cdot + w_p = f_1(z).$$

Da nun $f_1(z)$ als einwerthige Funktion nach § 28 für irgend einen Werth von z unendlich grofs werden mufs, so mufs für diesen Werth von z auch mindestens einer der Summanden w_1, $w_2, \cdots\cdot w_p$ unendlich grofs werden.

Man kann aber ferner zeigen, dafs w nur für einen solchen Werth von z unendlich grofs werden kann, für den zugleich mindestens eine der rationalen Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ $\cdots$ unendlich grofs wird. Denn man hat

$$(2)\left\{\begin{array}{c} w_1 + w_2 + \cdots + w_p = f_1(z) \\ w_1 w_2 + w_1 w_3 + \cdots + w_{p-1} w_p = f_2(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_1 w_2 \cdots w_p = f_p(z). \end{array}\right.$$

Bezeichnet man nun einen der Werthe von w, die für einen gewissen Werth von z unendlich grofs werden, mit w_p, so kann man diesen absondern, und die Summen der Combinationen aus den übrigen Werthen von w einführen, indem man setzt

$$\begin{array}{c} w_1 + w_2 + \cdots w_{p-1} = \varphi_1(z) \\ w_1 w_2 + \cdots + w_{p-2} w_{p-1} = \varphi_2(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_1 w_2 \cdots w_{p-1} = \varphi_{p-1}(z); \end{array}$$

dann erhält man leicht

$$\begin{array}{l} f_1(z) = \varphi_1(z) + w_p \\ f_2(z) = \varphi_2(z) + w_p \varphi_1(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{p-1}(z) = \varphi_{p-1}(z) + w_p \varphi_{p-2}(z) \\ f_p(z) = w_p \varphi_{p-1}(z). \end{array}$$

Da nun w_p unendlich grofs ist, so mufs wegen der letzten Gleichung entweder $f_p(z)$ unendlich grofs sein, und dann ist der obige Satz schon in Erfüllung gegangen; oder wenn dies nicht der Fall ist, mufs $\varphi_{p-1}(z)$ verschwinden. Dann folgt ebenso aus der vorletzten Gleichung, dafs entweder $f_{p-1}(z)$ unendlich grofs, oder $\varphi_{p-2}(z)$ Null sein mufs. Geht man so bis zu der zweiten Gleichung fort, und tritt der Fall ein, dafs keine der Funktionen f von $f_p(z)$ bis $f_2(z)$ für den betrachteten Werth von z unendlich grofs ist, so müssen die Funktionen φ von $\varphi_{p-1}(z)$ bis $\varphi_1(z)$ alle verschwinden, und dann folgt aus der ersten Gleichung, dafs $f_1(z)$ unendlich grofs sein mufs.

Da nun auch umgekehrt aus den Gleichungen (2) folgt, dafs jedesmal, wenn eine der Funktionen f unendlich grofs wird, dasselbe auch für mindestens eine der Funktionen w eintritt, so erhält man alle Punkte z, in denen die algebraische Funktion w

unendlich grofs wird, wenn man alle Punkte aufsucht, in denen die rationalen Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots.$ unendlich grofs werden. Da aber die letzteren nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich grofs werden können, so kann auch eine algebraische Funktion nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich grofs werden*).

Allein nun kann auch bewiesen werden, dafs eine algebraische Funktion in keinem Punkte von einer unendlich hohen Ordnung unendlich grofs werden kann. Da nämlich die rationalen Funktionen f nur von endlicher Ordnung unendlich grofs werden (§ 32), so sei α ein Punkt, in welchem für diese Funktionen die höchste Ordnung des Unendlichwerdens eintritt, und diese höchste Ordnung sei die $(r-1)$te. Dann ist für diejenigen Funktionen f, die von dieser höchsten Ordnung unendlich grofs werden, das Produkt

$$(z-\alpha)^{r-1} f(z)$$

nach § 29 in $z=\alpha$ weder Null noch unendlich grofs. Für diejenigen dagegen, die in $z=\alpha$ entweder gar nicht oder von einer niedrigeren Ordnung unendlich sind, ist dieses Produkt Null, und dasselbe tritt für alle Funktionen f ein, wenn an Stelle von $r-1$ ein höherer Exponent tritt. Führt man nun in die Gleichung (1) an Stelle von w eine andere Funktion W ein, indem man setzt

$$w = \frac{W}{(z-\alpha)^r}, \tag{3}$$

so erhält man für W die folgende Gleichung

$$W^p - (z-\alpha)^r f_1(z) W^{p-1} + (z-\alpha)^{2r} f_2(z) W^{p-2} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^p (z-\alpha)^{pr} f_p(z) = 0.$$

Da in dieser aber bei allen Coefficienten der Exponent von $z-\alpha$ gröfser als $r-1$ ist, so verschwinden alle für $z=\alpha$ und die Gleichung reducirt sich für diesen Werth von z auf

$$W^p = 0,$$

sodafs die Werthe von W, welche $z=\alpha$ zugehören, sämmtlich Null sind. Nun folgt aus (3)

$$W = (z-\alpha)^r . w;$$

also haben die Funktionswerthe w die Eigenschaft, dafs für sie das Produkt $(z-\alpha)^r . w$ an der Stelle $z=\alpha$ verschwindet. Da

*) *Königsberger,* Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen I. S. 112.

aber eine oder mehrere von ihnen hier unendlich grofs sind, so mufs es für diese einen positiven, ganzen oder gebrochenen Exponenten μ, der kleiner als r ist, geben, bei dem das Produkt $(z - \alpha)^{\mu} . w$ einen endlichen und von Null verschiedenen Werth erhält; und in einem solchen Falle sagt man wieder, dafs das betreffende w von endlicher Ordnung unendlich grofs ist*).

Bedeutet α einen Punkt, in welchem keine der Funktionen f die $(r - 1)$te Ordnung des Unendlichwerdens erreicht, in welchem aber doch eine oder mehrere von ihnen unendlich grofs werden, so gilt das Gesagte um so mehr. Tritt aber ein Unendlichwerden für $z = \infty$ ein, so setze man $z = \frac{1}{u}$, dann werden die f rationale Funktionen von u, mithin findet, wenn man auch w als Funktion von u betrachtet, das Vorige unmittelbar Anwendung auf den Punkt $u = 0$. Wir erhalten daher den Satz: Eine algebraische Funktion wird stets in einer endlichen Anzahl von Punkten und in jedem von endlicher Ordnung unendlich grofs sein.

Wir brauchen nun in der *Riemann*'schen Fläche, in welcher eine algebraische Funktion nach § 12 als eine eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche betrachtet werden kann, diejenigen Punkte, welche keine Verzweigungspunkte sind, nicht mehr zu untersuchen, da für diese die Sätze des vorigen Abschnittes, die sich nur auf endliche Flächentheile beziehen, welche keine Verzweigungspunkte enthalten, ihre Geltung nicht verlieren.

Wir haben daher hier nur noch die Verzweigungspunkte selbst näher zu betrachten und knüpfen an die in § 21 angestellte Untersuchung an, welche Folgendes ergeben hat: Ist $z = b$ ein Verzweigungspunkt einer Funktion $f(z)$, in welchem m Blätter der z-Fläche zusammenhängen (ein Windungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung (§ 13)), und setzt man

$$(z - b)^{\frac{1}{m}} = \zeta,$$

wodurch $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ übergehe, so hat $\varphi(\zeta)$ an der $z = b$ entsprechenden Stelle $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunkt.

Man kann nun zuerst das Kennzeichen von S. 119 für das Endlichbleiben der Funktion auf den Punkt $\zeta = 0$ anwenden und schliefsen, dafs $\varphi(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = 0$ endlich bleibt, wenn

*) *Königsberger*, Vorlesungen u. s. w. I. S. 177.

$$\left[\lim \zeta\varphi(\zeta)\right]_{\zeta=0} = 0$$

ist; folglich erhalten wir als die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs $f(z)$ in dem Verzweigungspunkte $z = b$ endlich bleibe:

$$\left[\lim (z - b)^{\frac{1}{m}} f(z)\right]_{z=b} = 0.$$

Ferner ergeben die Betrachtungen des § 29, dafs, wenn $\varphi(\zeta)$ in dem Punkte $\zeta = 0$ unendlich grofs von der $n$ten Ordnung wird, man setzen kann

$$\varphi(\zeta) = \frac{g'}{\zeta} + \frac{g''}{\zeta^2} + \frac{g'''}{\zeta^3} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{\zeta^n} + \lambda(\zeta),$$

wo $\lambda(\zeta)$ für $\zeta = 0$ endlich bleibt, und die Gröfsen g constante Coefficienten bedeuten. Demnach hat man

$$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}} + \frac{g'''}{(z-b)^{\frac{3}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z),$$

wo $\psi(z) = \lambda(\zeta)$ sei, und für $z = b$ endlich bleibt. Dann ist

$\lim (z - b)^{\frac{n}{m}} f(z)$ endlich und von Null verschieden,

und man bezeichnet die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(z)$ durch den Bruch $\frac{n}{m}$.

In b hängen m Blätter der z-Fläche zusammen, daher fallen hier auch m Funktionswerthe auf einander. Werden diese mit $w_1, w_2, \cdots w_m$ bezeichnet, so haben die Gröfsen

$$w_1 (z - b)^{\frac{n}{m}}, \; w_2 (z - b)^{\frac{n}{m}}, \; \cdots w_m (z - b)^{\frac{n}{m}}$$

in b einen endlichen und von Null verschiedenen Werth, also gilt dasselbe auch von ihrem Produkt

$$w_1 w_2 \cdots w_m (z - b)^n.$$

Daher kann man auch sagen: Die Funktion w wird in b, wo m Blätter zusammenhängen, n Mal unendlich, wenn jeder der hier zusammenfallenden Werthe von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich wird. Der S. 146 aufgestellte Satz kann dann so ausgesprochen werden: Eine algebraische Funktion wird stets eine endliche Anzahl von Malen unendlich grofs.

Genauer bestimmt man die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$, indem man den Ausdruck angiebt, um welchen sich $f(z)$ in b von einer dort endlich bleibenden Funktion unterscheidet. Dieser Ausdruck schreitet, wie die letzte Gleichung zeigt, nach ganzen Potenzen von $(z-b)^{-\frac{1}{m}}$ fort. Man sagt also z. B. $f(z)$ wird unendlich, wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}$, oder wie $\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$, oder wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}+\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$, u. s. w.

Betrachten wir nun noch den Werth $z=\infty$, welcher, wie wir schon § 14 gesehen haben, durch einen bestimmten Punkt repräsentirt werden und dann auch als Verzweigungspunkt auftreten kann. Man setze

$$z=\frac{1}{u} \text{ und } f(z)=\varphi(u);$$

dann ist $u=0$ ein Verzweigungspunkt $(m-1)$ter Ordnung für $\varphi(u)$, wenn $z=\infty$ ein solcher für $f(z)$ ist. Demnach ist $f(z)$ für $z=\infty$ endlich, wenn

$$\lim\left[u^{\frac{1}{m}}\varphi(u)\right]_{u=0}=\lim\left[\frac{f(z)}{z^{\frac{1}{m}}}\right]_{z=\infty}=0$$

ist. Wird aber $f(z)$ für $z=\infty$, und also auch $\varphi(u)$ für $u=0$ von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich, so ist

$$\lim\left[u^{\frac{n}{m}}\varphi(u)\right]_{u=0}=\lim\left[\frac{f(z)}{z^{\frac{n}{m}}}\right]_{z=\infty}$$

endlich und von Null verschieden, und man kann setzen

$$\varphi(u)=\frac{g'}{u^{\frac{1}{m}}}+\frac{g''}{u^{\frac{2}{m}}}+\cdots+\frac{g^{(n)}}{u^{\frac{n}{m}}}+\lambda(u)$$

oder

$$f(z)=g'z^{\frac{1}{m}}+g''z^{\frac{2}{m}}+\cdots+g^{(n)}z^{\frac{n}{m}}+\psi(z), \tag{4}$$

wo $\psi(z)=\lambda(u)$ für $z=\infty$ endlich bleibt. In diesem Falle sagt man, $f(z)$ wird in $z=\infty$ n Mal unendlich.

§ 39.

Wir müssen nun auch das Verhalten der derivirten Funktion $\frac{dw}{dz}$ ($f(z) = w$ gesetzt) in einem Verzweigungspunkte näher ins Auge fassen. Zuerst betrachten wir nur solche endlichen Punkte, in denen w endlich bleibt. Im § 24 ist gezeigt worden, dafs, wenn w in einem Gebiete endlich, stetig und einändrig ist, also weder Unstetigkeitspunkte noch Verzweigungspunkte besitzt, $\frac{dw}{dz}$ in demselben Gebiete ebenfalls endlich und stetig bleibt. Drückt man nun die Derivirte durch den Grenzwerth, dem sie gleich ist, aus, indem man den für $z = a$ stattfindenden Werth von w mit w_a bezeichnet, so hat man

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{w - w_a}{z - a},$$

und kann demgemäfs sagen, wenn $z = a$ weder ein Unstetigkeitspunkt noch ein Verzweigungspunkt von w ist, so ist

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ nicht unendlich grofs.}$$

Man kann aber auch entscheiden, unter welcher Bedingung dieser Grenzwerth von Null verschieden bleibt. Dazu braucht man nur z als Funktion von w zu betrachten. Wenn nämlich der dem Punkte $z = a$ entsprechende Punkt $w = w_a$ kein Verzweigungspunkt der Funktion z ist, so ist nach dem Obigen

$$\lim \frac{z - a}{w - w_a} \text{ nicht unendlich grofs,}$$

und daher der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ nicht Null.}$$

Wir erhalten also zuerst folgenden Satz, der als Grundlage für das Folgende dient: Sind $z = a$ und $w = w_a$ zwei einander entsprechende endliche Punkte, und ist weder $z = a$ ein Verzweigungspunkt von w, noch $w = w_a$ ein Verzweigungspunkt von z, so ist

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ endlich und nicht Null.}$$

Daraus folgt, dafs die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ in einem endlichen Punkte (in dem auch w endlich ist) nur dann Null oder unendlich grofs werden kann, wenn darin entweder für w, als Funktion von z, oder für z, als Funktion von w betrachtet, eine Verzweigung eintritt.

Tritt nun an die Stelle von a ein Verzweigungspunkt b, in welchem aber w einen endlichen Werth w_b hat, so setze man, wenn die z-Fläche sich m Mal um b windet (nach § 21),

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} = \zeta;$$

dann hat w, als Funktion von ζ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ weder einen Unstetigkeitspunkt noch einen Verzweigungspunkt. Nehmen wir nun den Fall an, dafs auch ζ, als Funktion von w betrachtet, an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunkt besitzt, so sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, und daher ist

$$\lim \frac{w-w_b}{\zeta} \text{ oder } \lim \frac{w-w_b}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ weder Null noch unendlich.}$$

Nun ist aber

$$z - b = \zeta^m,$$

also z eine rationale Funktion von ζ, und folglich nach § 15 eine ebenso verzweigte Funktion von w, wie ζ. Wenn daher ζ an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunkt besitzt, so hat z, als Funktion von w betrachtet, dort ebenfalls keinen solchen, und daher erhalten wir folgenden Satz: Hat w in $z = b$ einen Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, z aber, als Funktion von w betrachtet, in $w = w_b$ keinen Verzweigungspunkt, so ist

(1) $$\lim \frac{w-w_b}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.}$$

Bezeichnet man diesen endlichen Grenzwerth mit k, so ist nun auch

$$\lim \frac{(w-w_b)^m}{z-b} = k^m;$$

es war aber

$$\lim \frac{w-w_b}{z-b} = \frac{dw}{dz},$$

also ist

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{k^m}{(w - w_b)^{m-1}} = \lim \frac{k}{(z-b)^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Unter der Voraussetzung des Satzes (1) wird also $\frac{dw}{dz}$ in b unendlich grofs, und zwar so, dafs

$$\lim (w - w_b)^{m-1} \frac{dw}{dz} \text{ und } \lim (z-b)^{\frac{m-1}{m}} \frac{dw}{dz} \text{ weder Null}$$

noch unendlich ist. (2)

Wenn dagegen ζ oder $(z-b)^{\frac{1}{m}}$ in $w = w_b$ einen Verzweigungspunkt besitzt, und zwar einen solchen, in welchem μ Blätter der w-Fläche zusammenhängen, so treffen die Voraussetzungen des Satzes (1) in der Weise zu, dafs ζ als Funktion von w in w_b einen Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, w aber als Funktion von ζ in $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunkt hat, und folglich ist dann

$$\lim \frac{\zeta}{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}$$

und also auch der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{(w-w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und nicht Null.}$$

Da nun wieder z und ζ gleichverzweigte Funktionen von w sind, so schliefsen wir: Hat w an der Stelle $z = b$ einen Windungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung, und z als Funktion von w betrachtet an der entsprechenden Stelle $w = w_b$ einen Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, so ist

$$\lim \frac{(w-w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.}$$ (3)

Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit h, so folgt

$$\lim \frac{(w-w_b)^{\frac{m}{\mu}}}{z-b} = h^m,$$

und da

$$\lim \frac{w - w_b}{z - b} = \frac{dw}{dz}$$

ist,

$$\frac{dw}{dz} = \lim h^m (w - w_b)^{\frac{\mu - m}{\mu}} = \lim h^\mu (z - b)^{\frac{\mu - m}{m}}.$$

(4) Demnach ist unter der Voraussetzung des Satzes (3) $\frac{dw}{dz}$ Null oder unendlich grofs, je nachdem $\mu >$ oder $< m$ ist, und zwar so, dafs

$\lim (w - w_b)^{\frac{m - \mu}{\mu}} \frac{dw}{dz}$ und $\lim (z - b)^{\frac{m - \mu}{m}} \frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich ist.

Wir haben nun noch den Werth $z = \infty$ zu betrachten, indem wir die Voraussetzung beibehalten, dafs er einen Verzweigungspunkt repräsentirt, in welchem aber w endlich ist. Sei

$$z = \frac{1}{u},$$

und w' der für $z = \infty$ oder $u = 0$ stattfindende Werth von w. Nehmen wir an, $z = \infty$ sei von w ein Windungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung, $w = w'$ aber von z ein Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, so erhalten wir nach (3), weil z und u gleichverzweigte Funktionen von w sind, und auch die Verzweigung von w dieselbe bleibt, gleichviel ob man w als Funktion von z oder von u betrachtet,

$$(5)\quad \lim \left[\frac{(w - w')^{\frac{1}{\mu}}}{u^{\frac{1}{m}}}\right]_{u=0} \text{ oder } \left[\lim z^{\frac{1}{m}} (w - w')^{\frac{1}{\mu}}\right]_{z=\infty}$$

endlich und nicht Null,

und wenn dieser Grenzwerth mit h bezeichnet wird (nach 4)

$$\frac{dw}{du} = \lim h^m (w - w')^{\frac{\mu - m}{\mu}} = \lim h^\mu u^{\frac{\mu - m}{m}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2} \frac{dw}{du},$$

also

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{h^m (w-w')^{\frac{\mu-m}{\mu}}}{z^2} = -\lim \frac{h^\mu u^{\frac{\mu-m}{m}}}{z^2}$$

oder

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{(w-w')^{\frac{\mu+m}{\mu}}}{h^m} = -\lim \frac{h^\mu}{z^{\frac{\mu+m}{m}}}.$$

Demnach ist hier $\frac{dw}{dz}$ Null und zwar so, dafs die Ausdrücke

$$z^2 (w-w')^{\frac{m-\mu}{\mu}} \frac{dw}{dz}, \quad \frac{1}{(w-w')^{\frac{\mu+m}{\mu}}} \frac{dw}{dz}, \quad z^{\frac{\mu+m}{m}} \frac{dw}{dz} \tag{6}$$

endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben.

Endlich wenden wir uns zur Betrachtung des Falles, dafs w selbst in einem Verzweigungspunkte unendlich grofs wird, und nehmen letzteren zuerst endlich $= b$ an. Hängen nun in $z = b$ m Blätter und in $w = \infty$ μ Blätter zusammen, so können wir sofort aus (5) erkennen, welcher Ausdruck endlich und von Null verschieden bleibt. Denn setzen wir dort $z - b$ an die Stelle von $w - w'$, ferner w an die Stelle von z und vertauschen m mit μ mit einander, so ergiebt sich, dafs

$$\lim w^{\frac{1}{\mu}} (z-b)^{\frac{1}{m}} = h$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Da nun hieraus aber

$$\lim w\,(z-b)^{\frac{\mu}{m}} = h^\mu$$

folgt, sodafs auch dieser Grenzwerth weder Null noch unendlich grofs ist, so ergiebt sich (nach § 38), dafs w in diesem Falle unendlich grofs von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$ ist; und zugleich gilt auch das Umgekehrte. Indem wir ferner in dem zweiten der Ausdrücke (6) dieselben Vertauschungen vornehmen, wie oben, sehen wir, dafs

$$\frac{1}{(z-b)^{\frac{m+\mu}{m}}} \frac{dz}{dw}$$

und also auch der reciproke Werth

$$(z-b)^{\frac{m+\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$$

endlich und nicht Null ist, und dafs also $\frac{dw}{dz}$ unendlich grofs ist von der Ordnung $\frac{m+\mu}{m}$. Das Resultat ist daher: Wird w in einem Windungspunkte $(m-1)$ter Ordnung $z=b$ unendlich grofs von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$, so ist $w=\infty$ selbst zugleich ein Windungspunkt $(\mu-1)$ter Ordnung, und umgekehrt; und $\frac{dw}{dz}$ wird von der Ordnung $\frac{m+\mu}{m}$ unendlich grofs.

Wird zweitens w für $z=\infty$ unendlich grofs, und ist dieser Punkt ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, während $w=\infty$ ein Windungspunkt $(\mu-1)$ter Ordnung ist, so setze man $z=\frac{1}{u}$; dann ist nach dem vorigen Satze für $u=0$

$$\lim w\,.\,u^{\frac{\mu}{m}}$$

und daher für $z=\infty$

$$\lim \frac{w}{z^{\frac{\mu}{m}}}$$

endlich und von Null verschieden, und folglich w unendlich grofs von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$. Ferner bleibt für $u=0$

$$\lim u^{\frac{m+\mu}{m}} \frac{dw}{du}$$

und für $z=\infty$

$$\lim \frac{1}{z^{\frac{m+\mu}{m}}} \frac{dw}{du}$$

endlich und von Null verschieden. Da nun

$$\frac{dw}{du} = -z^2 \frac{dw}{dz}$$

ist, so ist

$$\lim z^{\frac{m-\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$$

für $z=\infty$ endlich und nicht Null, und daher $\frac{dw}{dz}$ entweder Null oder unendlich grofs, je nachdem $m >$ oder $< \mu$ ist.

Hat man z. B. die Gleichung

$$(w - w')^3 (z - b)^5 = 1,$$

so ist

$$w - w' = \frac{1}{(z-b)^{\frac{5}{3}}} \quad \text{und} \quad z - b = \frac{1}{(w-w')^{\frac{3}{5}}},$$

also ist w für $z = b$ unendlich grofs von der Ordnung $\frac{5}{3}$. Zugleich hängen an der Stelle $z = b$ drei Blätter der z-Fläche, und an der entsprechenden Stelle $w = \infty$ fünf Blätter der w-Fläche zusammen. Ferner ist

$$\frac{dw}{dz} = -\tfrac{5}{3} \cdot \frac{1}{(z-b)^{\frac{8}{3}}},$$

also für $z = b$ unendlich grofs von der Ordnung $\frac{8}{3}$.

Bei den Gleichungen

$$w = z^{\frac{3}{5}} \quad \text{und} \quad w = z^{\frac{5}{3}}$$

sind die Stellen $z = \infty$ und $w = \infty$ entsprechend. Man erhält resp.

$$\frac{dw}{dz} = \tfrac{3}{5} \cdot \frac{1}{z^{\frac{2}{5}}} \quad \text{und} \quad \frac{dw}{dz} = \tfrac{5}{3}\, z^{\frac{2}{3}},$$

daher ist $\frac{dw}{dz}$ für $z = \infty$ im ersten Falle Null, und im zweiten unendlich grofs.

§ 40.

Wir können nun auch angeben, in welcher Weise sich die Fläche der z auf der Fläche der w in des Nähe eines Verzweigungspunktes abbildet, und damit die in § 7 erwähnten Ausnahmefälle erledigen.

Nehmen wir an, $z = b$ sei ein Windungspunkt $(m - 1)$ter, und $w = w_b$ ein Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, so hat nach § 39 (3)

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}$$

einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerth. Sind demnach z' und z'' zwei an b in verschiedener Richtung unendlich nahe liegende Punkte, w' und w'' die ihnen entsprechenden Punkte der w-Fläche, so ist es dieser Ausdruck

und nicht mehr wie in § 7 der Ausdruck $\lim \frac{w - w_b}{z - b}$, der für beide Paare entsprechender Punkte denselben endlichen Werth hat. Also ist

$$\frac{(w' - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z' - b)^{\frac{1}{m}}} = \frac{(w'' - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z'' - b)^{\frac{1}{m}}}$$

oder

$$\left(\frac{w' - w_b}{w'' - w_b}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{z' - b}{z'' - b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned}
w' - w_b &= \varrho' (\cos\psi' + i\sin\psi') \\
w'' - w_b &= \varrho'' (\cos\psi'' + i\sin\psi'') \\
z' - b &= r' (\cos\varphi' + i\sin\varphi') \\
z'' - b &= r'' (\cos\varphi'' + i\sin\varphi''),
\end{aligned}$$

so folgt

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\cos\frac{\psi' - \psi''}{\mu} + i\sin\frac{\psi' - \psi''}{\mu}\right) =$$

$$\left(\frac{r'}{r''}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\cos\frac{\varphi' - \varphi''}{m} + i\sin\frac{\varphi' - \varphi''}{m}\right)$$

und hieraus

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\frac{1}{m}}; \qquad \frac{\psi' - \psi''}{\mu} = \frac{\varphi' - \varphi''}{m}$$

oder

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{m} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\mu}; \qquad m(\psi' - \psi'') = \mu(\varphi' - \varphi'').$$

Es findet also in der Nähe des Verzweigungspunktes nicht mehr Ähnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt.

In dem in § 7 angeführten Beispiele

$$w = z^2$$

ist $m = 1$ und $\mu = 2$, folglich wird für den Verzweigungspunkt $w = 0$ (entsprechend $z = 0$) $\frac{dw}{dz} = 0$, da $\mu > m$ ist; zugleich ist

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^2, \qquad \psi' - \psi'' = 2(\varphi' - \varphi''),$$

was sich auch schon § 7 in einem bestimmten Falle ergeben

hatte. Eine unmittelbare Folge hievon ist u. a. der Satz:*) Der Winkel, unter welchem sich zwei confocale Parabeln schneiden, ist halb so grofs, als der Winkel, den ihre Axen mit einander bilden. Man überzeugt sich nämlich nach dem § 7 angegebenen Verfahren oder auch auf andere Weise leicht, dafs jeder nicht durch den Nullpunkt gehenden Geraden in z eine Parabel in w entspricht, deren Brennpunkt im Nullpunkte liegt, und deren Axe einer Geraden in z entspricht, die ebenfalls durch den Nullpunkt geht und der früheren Geraden parallel ist. Der Winkel, welchen zwei nicht durch den Nullpunkt gehende Gerade in z mit einander bilden, ist nun ebenso grofs, wie der Winkel, unter dem sich die entsprechenden Parabeln in w schneiden; unter demselben Winkel schneiden sich auch die durch den Nullpunkt gehenden parallelen Geraden in z, welchen die Axen der Parabeln in w entsprechen. Da aber der Nullpunkt Verzweigungspunkt von z ist, und zwar $m = 1$ und $\mu = 2$, so bilden die Axen der Parabeln den doppelten Winkel mit einander.

§ 41.

Es wurde oben § 38 gezeigt, dafs eine algebraische mehrwerthige Funktion eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird. Wir beweisen nun das Umgekehrte, nämlich:

Wenn eine Funktion w für jeden Werth von z n Werthe besitzt und nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, so ist sie eine algebraische Funktion.

Man bezeichne mit $w_1, w_2, \cdots w_n$ die n Werthe von w, welche einem bestimmten Werthe von z entsprechen. Bildet man nun das Produkt

$$S = (\sigma - w_1)(\sigma - w_2)\cdots(\sigma - w_n),$$

worin σ eine beliebige von z unabhängige Gröfse bedeutet, so ist S symmetrisch in Bezug auf $w_1, w_2, \cdots w_n$. Läfst man z irgend eine scheinbar geschlossene (§ 12) Linie beschreiben, so werden zwar einige oder alle der Werthe $w_1, w_2, \cdots w_n$ sich geändert haben, aber in den n unmittelbar über einander liegenden Punkten der z-Fläche wird w wieder die nämlichen Werthe nur in anderer Anordnung besitzen, folglich hat sich S, als Funktion von z betrachtet, dabei nicht geändert. S ist also in allen Punkten eindrig, und daher eine einwerthige Funktion von z. Aufserdem

*) *Siebeck*: Über die graphische Darstellung imaginärer Funktionen, Crelle's Journ. Bd. 55. S. 239.

wird S nur da unendlich grofs, wo einer oder mehrere der Werthe $w_1, w_2, \ldots w_n$ unendlich grofs werden. Jeder der letzteren wird der Annahme nach nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich, also findet dasselbe auch bei S statt. Demnach ist S eine einwerthige Funktion, welche nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, und daher nach § 32 eine rationale Funktion von z. Ist nun $z = a$ ein Unstetigkeitspunkt von w, der nicht zugleich ein Verzweigungspunkt ist, und ist in diesem w_k unendlich grofs, und zwar α Mal, so ist

$$w_k (z - a)^\alpha \quad \text{und also auch} \quad (\sigma - w_k)(z - a)^\alpha$$

in a nicht unendlich grofs (§ 29). Ist ferner $z = b$ zugleich Unstetigkeitspunkt und Verzweigungspunkt, und hängen in demselben μ Blätter zusammen, so fallen in ihm auch μ Werthe von w auf einander. Bezeichnet man diese mit $w_1, w_2, \ldots w_\mu$, und mit β die Anzahl der Male, wie oft w in b unendlich grofs wird, so sind nach § 38 die Gröfsen

$$w_1 (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \quad w_2 (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots\cdots \quad w_\mu (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

und folglich auch

$$(\sigma - w_1)(z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \quad (\sigma - w_2)(z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots\cdot \quad (\sigma - w_\mu)(z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

nicht unendlich grofs. Demnach bleibt auch ihr Produkt

$$(\sigma - w_1)(\sigma - w_2) \cdots\cdot (\sigma - w_\mu)(z - b)^\beta$$

in b endlich. Nun seien

$$a_1, a_2, \cdots\cdot a_\lambda$$

die Unstetigkeitspunkte, die nicht Verzweigungspunkte sind,

$$b_1, b_2, \cdots\cdot b_\nu$$

die Unstetigkeitspunkte, die zugleich Verzweigungspunkte sind, und man bezeichne die zugehörigen Ordnungszahlen α und β mit entsprechenden Indices. Multiplicirt man dann S mit dem Ausdruck

$$\begin{aligned} Z = {} & (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \cdots\cdot (z - a_\lambda)^{\alpha_\lambda} \\ & (z - b_1)^{\beta_1} (z - b_2)^{\beta_2} \cdots\cdot (z - b_\nu)^{\beta_\nu}, \end{aligned}$$

so bleibt das Produkt

$$\begin{aligned} S \,.\, Z = {} & (\sigma - w_1)(\sigma - w_2) \cdots\cdot (\sigma - w_n)(z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \\ & \cdots\cdot (z - a_\lambda)^{\alpha_\lambda} (z - b_1)^{\beta_1} (z - b_2)^{\beta_2} \cdots (z - b_\nu)^{\beta_\nu} \end{aligned}$$

für alle Werthe a und b, also überhaupt für alle endlichen Werthe

von z endlich. Demnach ist SZ eine einwerthige Funktion, welche nur für $z = \infty$ und auch hier nur von einer endlichen Ordnung unendlich grofs wird; folglich ist (nach § 31) SZ eine ganze Funktion von z. Nun wird in SZ zuerst jeder Faktor von Z für $z = \infty$ unendlich grofs; bezeichnet ferner h die Anzahl der Male, wie oft w für $z = \infty$ unendlich grofs wird, so ist die Anzahl der Male, wie oft SZ für $z = \infty$ unendlich grofs ist, gleich

$$h + \Sigma\alpha + \Sigma\beta$$

und dies ist gerade die Anzahl der Male, wie oft w überhaupt unendlich grofs wird. Denn w wird α Mal in einem Punkte a, β Mal in einem Verzweigungspunkte b, und h Mal für $z = \infty$ unendlich grofs. Setzt man $h + \Sigma\alpha + \Sigma\beta = m$, so ist SZ eine ganze Funktion von $m$ten Grade von z. Nimmt man nun auf die Gröfse σ Rücksicht, so ist SZ auch eine ganze Funktion von σ vom $n$ten Grade. Denkt man sich also SZ nach Potenzen von σ geordnet, so kann man sagen, dafs SZ eine ganze Funktion von σ vom $n$ten Grade ist, deren Coefficienten ganze Funktionen von z sind, die bis auf den $m$ten Grad steigen, was *Riemann* durch das Zeichen

$$F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$$

auszudrücken pflegt. Diese Gröfse verschwindet, wenn σ einen der Werthe $w_1, w_2, \cdots w_n$ erhält, und daher sind dies die n Wurzeln der Gleichung

$$F(\overset{n}{w}, \overset{m}{z}) = 0.$$

Folglich ist eine n-werthige Funktion, die m Mal unendlich wird, die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen w und z, die in Bezug auf w vom $n$ten Grade ist, und deren Coefficienten ganze Funktionen von z höchstens vom Grade m sind*).

---

*) Man beachte, dafs hier der Coefficient der höchsten Potenz von w nicht Eins zu sein braucht, wie dies in § 38 vorausgesetzt wurde.

Achter Abschnitt.

Integrale.

A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

§ 42.

Wir schreiten jetzt zu einer Vervollständigung der im Abschnitte IV. gegebenen Sätze, wobei wir jedoch nur ein unendlich grofs Werden von endlicher Ordnung berücksichtigen wollen. Nach den im vorigen Abschnitte festgestellten Begriffen über das Unendlichwerden der Funktionen können wir den in § 20 abgeleiteten Satz so aussprechen: Bezieht man das Integral

$$\int f(z)\,dz$$

auf eine geschlossene Linie, die nur einen Unstetigkeitspunkt a umgiebt, welcher kein Verzweigungspunkt ist, und in welchem $f(z)$ von der ersten Ordnung unendlich grofs wird, so ist

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i \lim (z-a)\,f(z).$$

Wir untersuchen nun den Werth dieses Integrals, wenn $f(z)$ in a unendlich grofs von der $n$ten Ordnung ist. Nach § 29 ist in der Umgebung des Punktes a

$$(1)\quad f(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c^{(k)}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und stetig bleibt. Bildet man nun $\int f(z)\,dz$ in Bezug auf eine den Punkt a umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen um a beschriebenen Kreis wählen und hat dann zuerst

$$\int \psi(z)\,dz = 0,$$

ferner

$$\int \frac{c'\,dz}{z-a} = 2\pi i c'.$$

Setzt man sodann

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so folgt

$$\int \frac{c^{(k+1)}dz}{(z-a)^{k+1}} = \frac{c^{(k+1)}i}{r^k}\int_0^{2\pi}(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)\,d\varphi.$$

Dieses Integral verschwindet aber, weil für jeden von Null verschiedenen ganzzahligen Werth von k

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi \, d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \, d\varphi = 0$$

ist. Demnach ist für jeden von 1 verschiedenen Werth von k

$$\int \frac{c^{(k)} \, dz}{(z-a)^k} = 0.$$

Aus dem Ausdrucke (1) verschwinden also bei der Integration alle Glieder mit Ausnahme des ersten, und man hat

$$\int f(z) \, dz = 2\pi i c'.$$

Demnach ist dies Integral stets gleich Null, wenn in dem Ausdrucke, der die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied $\frac{c'}{z-a}$ fehlt; beim Vorhandensein dieses Gliedes aber hat das Integral den Werth $2\pi i c'$.

Gehen wir jetzt zu einem Verzweigungspunkte über. Ist b ein Unstetigkeitspunkt, in welchem m Blätter der z-Fläche zusammenhängen, so hat man in der Nachbarschaft des Punktes b (§ 38)

$$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(m)}}{z-b} + \cdots + \frac{g^{(k)}}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} + \cdots$$
$$+ \frac{g_{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z), \tag{2}$$

wo $\psi(z)$ in $z = b$ endlich und stetig ist. Bildet man nun $\int f(z)\, dz$ bezogen auf eine den Punkt b umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen Kreis wählen, dessen Peripherie aber m Mal durchlaufen werden mufs, damit er geschlossen sei. Nun ist wieder zuerst

$$\int \psi(z) \, dz = 0,$$

ferner für

$$z - b = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\int \frac{g^{(m)} \, dz}{z-b} = \int_0^{2m\pi} g^{(m)} i \, d\varphi = 2m\pi i g^{(m)}.$$

Bedeutet endlich k eine von m verschiedene ganze Zahl, so ist

$$\int \frac{g^{(k)} dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = g^{(k)} \int \frac{dz}{(z-b)^{\frac{k-m}{m}} (z-b)}$$

$$= i g^{(k)} r^{\frac{m-k}{m}} \int_0^{2m\pi} (\cos \frac{k-m}{m} \varphi - i \sin \frac{k-m}{m} \varphi)\, d\varphi.$$

Nun ist aber wieder

$$\int_0^{2m\pi} \cos \frac{k-m}{m} \varphi\, d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2m\pi} \sin \frac{k-m}{m} \varphi\, d\varphi = 0,$$

so lange k nicht gleich m ist, und daher ist auch

$$\int \frac{g^{(k)} dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = 0.$$

Also verschwinden bei der Integration des Ausdruckes (2) alle Glieder mit Ausnahme von $\frac{g^{(m)}}{z-b}$, und folglich ist

$$\int f(z)\, dz = 2 m \pi i g^{(m)}.$$

Demnach verschwindet auch dieses Integral immer dann, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied $\frac{g^{(m)}}{z-b}$ fehlt, und man kann allgemein den Satz aussprechen: Das Integral $\int f(z)\, dz$ genommen um einen Unstetigkeitspunkt, um welchen die z-Fläche sich m Mal windet, und in welchem $f(z)$ von endlicher Ordnung unendlich grofs wird, hat dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich grofs wird, vorhanden ist; und dieser Werth ist dann gleich $2 m \pi i$ Mal dem Coefficienten dieses Gliedes. Wenn der Unstetigkeitspunkt kein Verzweigungspunkt ist, braucht man nur $m = 1$ zu setzen.

§ 43.

Bei Berücksichtigung des unendlich grofsen Werthes von z hat man sich die unendliche Ebene nach § 14 als eine Kugel mit

unendlich grofsem Radius, also als eine geschlossene Fläche vorzustellen und den Werth $z = \infty$ durch einen bestimmten Punkt repräsentirt zu denken. Alsdann kann man auch von geschlossenen Linien reden, welche den unendlich entfernten Punkt umgeben. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Integrale verhalten, wenn sie auf solche geschlossene Linien bezogen werden. Diese bilden, auch wenn man sich die unendlich grofse Kugel wieder in der Ebene ausgebreitet denkt, geschlossene Linien, aber dasjenige von der Linie begrenzte Gebiet, welches den Punkt $z = \infty$ enthält, liegt in der Ebene aufserhalb der geschlossenen Linie.

Führt man statt z eine andere Variable u ein, indem man

$$z - h = \frac{1}{u - k}$$

und dann

$$f(z) = \varphi(u)$$

setzt, wo h und k zwei beliebig zu wählende Punkte bedeuten mögen, so entspricht jedem Punkte z ein Punkt u, und umgekehrt. Den Punkten $z = h$ und $u = k$ aber entsprechen resp. $u = \infty$ und $z = \infty$. Setzt man

$$z - h = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so wird

$$u - k = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i \sin\varphi).$$

Beschreibt nun z eine geschlossene Linie Z, welche den Punkt h umgiebt, so wächst φ von 0 bis zu einem Vielfachen von 2π; daher umgiebt auch die entsprechende, von u beschriebene Linie U den Punkt k, und zwar in ebenso vielen Umläufen, wird aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Geht ferner z von der Peripherie von Z nach aufsen, so wächst r, oder der Modul von $z - h$, folglich nimmt $\frac{1}{r}$, der Modul von $u - k$, ab, und daher geht u von der Peripherie von U nach innen. Demnach entsprechen allen aufserhalb Z liegenden Punkten z solche Punkte u, die innerhalb U liegen. Betrachtet man jetzt die Curve Z als die Begrenzung des aufserhalb liegenden Flächentheils, so ist die positive Begrenzungsrichtung für diesen die entgegengesetzte, wie für den innern Flächentheil; daher werden Z und U gleichzeitig in der positiven Begrenzungsrichtung der einander entsprechenden Flächentheile durchlaufen.

Nun ist

$$f(z) = \varphi(u), \qquad dz = -\frac{du}{(u-k)^2},$$

also erhält man

$$\int f(z)\,dz = -\int \frac{\varphi(u)\,du}{(u-k)^2},$$

und darin bezieht sich das erste Integral auf die Curve Z, und das zweite auf die entsprechende Curve U, auf beide in positiver Begrenzungsrichtung erstreckt. Hat man nun bei einer geschlossenen Fläche eine Curve Z, welche den Punkt ∞ umgiebt, so ist diese in der Ebene eine geschlossene Linie, welche den aufserhalb liegenden Flächentheil begrenzt. Der beliebig anzunehmende Punkt h kann immer so gewählt werden, dafs er innerhalb der Curve Z liegt, dann entspricht der Flächentheil, welcher den Punkt $z = \infty$ enthält, dem innerhalb U liegenden Flächentheile, und auf die positiven Begrenzungen dieser Flächentheile erstreckt gilt die vorige Gleichung

$$\int f(z)\,dz = -\int \frac{\varphi(u)\,du}{(u-k)^2}.$$

Der Werth des Begrenzungsintegrales $\int f(z)\,dz$ hängt also von der Beschaffenheit der Funktion $\dfrac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ ab. Nun braucht man nur solche Curven Z zu betrachten, welche abgesehen von dem Punkte $z = \infty$, keine Unstetigkeitspunkte umgeben, dann wird auch $\varphi(u)$ innerhalb U höchstens für $u = k$ unendlich grofs; es kommt also darauf an, ob und wie $\dfrac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ für $u = k$ unendlich grofs ist. Dieser Ausdruck ist gleich $(z-h)^2 f(z)$, und da für $z = \infty$

$$\lim\,(z-h)^2 f(z) = \lim\, z^2 f(z)$$

ist, so ergiebt sich, dafs zur Ermittelung unseres Begrenzungsintegrals nicht sowohl die Beschaffenheit der Funktion $f(z)$, als vielmehr die der Funktion $z^2 f(z)$ im Punkte $z = \infty$ mafsgebend ist. Legt man aber diese zu Grunde, so bleiben alle früheren Sätze, die von Begrenzungsintegralen gelten, auch für solche geschlossene Linien gültig, die den Punkt ∞ umgeben; nur ist dabei zu berücksichtigen, dafs, wenn das Integral in der positiven Begrenzungsrichtung des Flächenstücks, das den Punkt ∞ enthält, genommen wird, der Integralwerth das entgegen-

gesetzte Vorzeichen erhalten mufs. Ist also $z^2 f(z)$ für $z = \infty$ endlich, d. h. ist

$$\lim z f(z) = 0,$$

so ist das Integral Null; es genügt also hierzu nicht, dafs $f(z)$ endlich bleibe, es mufs vielmehr unendlich klein mindestens von der zweiten Ordnung sein. Ist ferner $z^2 f(z)$ unendlich grofs von der ersten Ordnung, d. h. ist

$$\lim z f(z) \text{ endlich und von Null verschieden,}$$

so ist

$$\int f(z)\,dz = -2\pi i \lim z f(z),$$

das Integral in der positiven Begrenzungsrichtung um den Punkt ∞ genommen. Im Allgemeinen hat das Integral dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z, ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Als Beispiel diene zuerst

$$\int \frac{dz}{1 + z^2};$$

hier ist

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{1 + z^2} = \lim \frac{1}{\frac{1}{z} + z} = 0,$$

also ist das Integral, bezogen auf eine den Punkt ∞ umgebende Linie, gleich Null. In der That ist jede, die beiden Punkte $z = -i$ und $z = +i$ umgebende Linie zugleich eine den Punkt ∞ umgebende, da die Funktion weiter keine Unstetigkeitspunkte hat, und wir haben schon § 20 gesehen, dafs für eine solche Linie das vorliegende Integral den Werth Null hat.

Zweitens. Wird das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

auf eine Linie um den Nullpunkt in der Richtung der wachsenden Winkel bezogen, so hat es den Werth $2\pi i$. Dieselbe Linie ist aber auch eine den Punkt ∞ umgebende, da die Funktion

$f(z) = \frac{1}{z}$ nur den einen Unstetigkeitspunkt $z = 0$ besitzt. Obgleich nun hier $f(z)$ für $z = \infty$ nicht unendlich grofs ist, so hat doch das Integral einen von Null verschiedenen Werth, weil

$$\Big[\lim z f(z)\Big]_{z=\infty} = \lim z \frac{1}{z} = 1$$

ist. Man erhält demnach

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

und in der That mufs die Linie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, wenn sie den Theil in positiver Richtung begrenzt, der den Punkt ∞ enthält.

Drittens kann man hienach den Werth des Integrals

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ermitteln, wenn es auf eine im ersten Blatte verlaufende Linie ausgedehnt wird, welche die beiden Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte $+1$ und -1 umgiebt. Denn eine solche umgiebt zugleich den Punkt ∞, ohne einen weiteren Unstetigkeitspunkt einzuschliefsen. Nun ist hier

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}} = \pm \frac{1}{i},$$

also wird

$$J = \pm 2\pi,$$

wo über das Zeichen noch zu entscheiden ist. Nun kann aber andrerseits die Linie, welche die Punkte $+1$ und -1 umgiebt, bis an den Verzweigungsschnitt heran verengert werden. Setzt man dann fest, dafs die Quadratwurzel auf der linken Seite des Verzweigungsschnittes (diesen in der Richtung von -1 nach $+1$ genommen) im ersten Blatte das Vorzeichen $+$, und daher auf der rechten Seite desselben ebenfalls im ersten Blatte das Vorzeichen $-$ habe (vgl. § 13), so ist auch, in der Richtung der abnehmenden Winkel integrirt (um den Punkt ∞ herum in der positiven Begrenzungsrichtung),

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da nun hier alle Elemente des Integrals positiv sind, so mufs auch J positiv sein, und man erhält

$$J = 4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = +\, 2\pi,$$

und daher auch

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Über den Umstand, dafs dies Integral einen endlichen Werth erhält, obgleich die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ für $z = 1$ unendlich grofs wird, vergleiche den folgenden Paragraphen.

B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integralfunktionen.

§ 44.

Wir behandeln in diesem Abschnitte die Frage, ob und unter welchen Bedingungen eine Integralfunktion endlich bleibt, wenn die obere Grenze derselben entweder einen Werth erreicht, für den die Funktion unter dem Integralzeichen unendlich grofs wird, oder selbst sich ins Unendliche entfernt. Wir untersuchen ferner, in welcher Weise die Integralfunktion unendlich grofs wird, wenn sie in diesen Fällen nicht endlich bleibt. Dabei beschränken wir uns aber auf solche Integrale, die unter dem Integralzeichen eine algebraische Funktion enthalten.

Sei

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\, dz$$

die zu betrachtende Integralfunktion, worin h eine beliebige Constante bedeute. Wir berücksichtigen bei derselben nur solche Integrationswege, welche der Funktion denselben Werth zuertheilen; die nächsten Abschnitte werden zeigen, dafs die durch die verschiedenen Integrationswege hervorgebrachte Vieldeutigkeit einer Integralfunktion den hier anzustellenden Betrachtungen keinen Eintrag thut.

Nimmt man zuerst an, $\varphi(z)$ werde in einem Punkte $z = a$,

der kein Verzweigungspunkt ist, unendlich grofs von der $n$ten Ordnung, so kann man nach § 29 setzen

$$\varphi(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z), \tag{1}$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Hieraus folgt

$$\int_h^t \varphi(z)\,dz = c'\int_h^t \frac{dz}{z-a} + c''\int_h^t \frac{dz}{(z-a)^2} + \cdots + c^{(n)}\int_h^t \frac{dz}{(z-a)^n} + \int_h^t \psi(z)\,dz.$$

Darin ist das letzte Glied eine auch für $t = a$ endlich bleibende Funktion; bezeichnen wir dieselbe mit $\lambda(t)$, und denken wir in derselben die von der unteren Grenze h der übrigen Integrale herrührenden constanten Glieder mit einbegriffen, so erhalten wir

$$F(t) = c' \log(t-a) - \frac{c''}{t-a} - \frac{c'''}{2(t-a)^2} - \cdots - \frac{c^{(n)}}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + \lambda(t).$$

Läfst man nun den Integrationsweg in dem Punkte $t = a$ endigen, so unterscheidet sich die Integralfunktion von einer in $t = a$ endlich bleibenden Funktion $\lambda(t)$ um eine Gröfse, welche das Glied $\log(t - a)$ enthält. Man sagt in diesem Falle, es wird $F(t)$ logarithmisch unendlich. Dieser Fall tritt ein, wenn in dem Ausdrucke (1) für $\varphi(z)$ das Glied $\frac{c'}{z-a}$ vorhanden ist. Fehlt dagegen dieses Glied, so fällt der Logarithmus fort, und $F(t)$ wird von einer ganzen Ordnung unendlich grofs. Aber endlich bleibt $F(t)$ für $t = a$ nur dann, wenn

$$\lim\,(z-a)\,\varphi(z) = 0$$

ist, d. h. wenn $\varphi(z)$ selbst in $z = a$ endlich bleibt.

Nehmen wir daher jetzt an, der Unstetigkeitspunkt a sei zugleich ein Verzweigungspunkt. Hängen in demselben m Blätter der z-Fläche zusammen, so kann man nach § 38 setzen

$$\varphi(z) = \frac{g'}{(z-a)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-a)^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(m)}}{z-a} + \frac{g^{(m+1)}}{(z-a)^{\frac{m+1}{m}}} + \cdots + \psi(z), \tag{2}$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Man erhält hieraus

$$F(t) = g' \frac{m}{m-1}(t-a)^{\frac{m-1}{m}} + g'' \frac{m}{m-2}(t-a)^{\frac{m-2}{m}}$$

$$+ \cdots\cdots + g^{(m-1)} m (t-a)^{\frac{1}{m}} + g^{(m)} \log(t-a) - \frac{g^{(m+1)} m}{(t-a)^{\frac{1}{m}}}$$

$$- \cdots\cdots + \lambda(t),$$

wenn wie oben mit $\lambda(t)$ das letzte endlich bleibende Glied mit Hinzuziehung der von der unteren Grenze h herrührenden Constanten bezeichnet wird.

Wenn nun in diesem Ausdrucke höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind, so bleibt $F(t)$ für $t = a$ endlich. Dieser Fall tritt ein, wenn auch in (2) höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind. Dann ist $\varphi(z)$ höchstens von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ unendlich, und folglich

$$\lim (z-a)\varphi(z) = 0.$$

Demnach ist die Bedingung für das Endlichbleiben der Funktion $F(t)$ hier dieselbe wie vorhin, und wir erhalten den allgemeinen Satz:

1) Die Integralfunktion

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\, dz$$

einer algebraischen Funktion $\varphi(z)$ hat für $t = a$ dann und nur dann einen endlichen Werth, wenn $\lim (z-a)\varphi(z) = 0$ ist. Ferner ergiebt sich Folgendes:

2) Ist $\lim (z-a)\varphi(z)$ endlich, aber von Null verschieden, so ist $F(t)$ für $t = a$ logarithmisch unendlich.

3) Hat $\lim (z-a)^\mu \varphi(z)$ für einen ganzen oder gebrochenen Exponenten μ, der gröfser als 1 ist, einen endlichen von Null verschiedenen Werth, so ist $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung, und wenn in der Entwickelung von $\varphi(z)$ das Glied von der Form $\frac{g}{z-a}$ vorhanden ist, zugleich logarithmisch unendlich.

§ 45.

Wir haben nun noch den Werth $t = \infty$ zu untersuchen. Durch die schon mehrmals angewendete Substitution

$$z = \frac{1}{u}$$

führen wir diesen Fall auf den vorigen zurück. Sei

$$\frac{1}{t} = \tau, \qquad F(t) = F_1(\tau), \qquad \varphi(z) = \varphi_1(u),$$

so wird

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\,dz = -\int_{\frac{1}{h}}^{\tau} \frac{\varphi_1(u)\,du}{u^2} = F_1(\tau).$$

Die Beschaffenheit von $F_1(\tau)$ richtet sich also nach der Beschaffenheit der Funktion $\frac{\varphi_1(u)}{u^2}$ für den Werth $u = 0$. Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen liefern dann Folgendes:

1) $F_1(\tau)$ ist endlich, wenn $\left[\lim \frac{u\varphi_1(u)}{u^2}\right]_{u=0} = \left[\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}\right]_{u=0} = 0.$

2) $F_1(\tau)$ ist logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}$ endlich und nicht Null.

3) $F_1(\tau)$ ist von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung (oder auch zugleich logarithmisch) unendlich, wenn für $\mu > 1$ $\lim \frac{u^\mu \varphi_1(u)}{u^2} = \lim \left(u^{\mu-2}\varphi_1(u)\right)$ endlich und nicht Null ist.

Nun ist

$$\frac{\varphi_1(u)}{u} = z\varphi(z); \qquad u^{\mu-2}\varphi_1(u) = \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}},$$

also schliefsen wir: für $t = \infty$ ist

1) $F(t)$ endlich, wenn $[\lim z\varphi(z)]_{z=\infty} = 0$;

2) $F(t)$ logarithmisch unendlich, wenn $\lim z\varphi(z)$ endlich und nicht Null;

3) $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung oder auch zugleich logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}}$ endlich und nicht Null ist (μ positiv und > 1).

Beispiele:

$\int_0^t \frac{dz}{1+z^2}$ wird für $t = +i$ oder $-i$ logarithmisch unendlich, bleibt aber endlich für $t = \infty$.

$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ bleibt endlich für $t = +1$ oder -1 und wird logarithmisch unendlich für $t = \infty$.

$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und $t = \pm \frac{1}{k}$ und auch für $t = \infty$, ist also für jeden Werth von t endlich.

$\int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz$ bleibt endlich für $t = \pm 1$, und wird für $t = \infty$ von der ersten Ordnung unendlich.

$\int_0^t \frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und $t = \pm \frac{1}{k}$, ebenso für $t = \infty$, und wird für $t = \pm \frac{1}{a}$ logarithmisch unendlich.

Neunter Abschnitt.

Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

§ 46.

Für die Untersuchung der Vieldeutigkeit einer Integralfunktion $\int f(z)\, dz$ ist von besonderer Bedeutung die Beschaffenheit der z-Fläche für die unter dem Integralzeichen stehende Funktion $f(z)$ in Rücksicht auf ihren Zusammenhang. In dieser Beziehung ist schon in § 18 der grofse Unterschied hervorgetreten, welcher zwischen solchen Flächen stattfindet, in denen jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet, und solchen, in denen nicht jede geschlossene Linie diese Eigenschaft besitzt. Wir wollen nun die Flächen in Beziehung auf diesen Unterschied näher ins Auge fassen*).

*) Wir werden bis auf Weiteres unter einer geschlossenen Linie eine solche verstehen, die einfach in sich zurückläuft, ohne sich selbst zu durchschneiden.

Man nennt nach *Riemann* die Flächen der ersteren Art einfach zusammenhängend, die der zweiten Art mehrfach zusammenhängend. Einfach zusammenhängend ist z. B. eine Kreisfläche, die Fläche einer Ellipse, überhaupt jede Fläche, welche nur aus einem Blatte besteht und von einer Linie begrenzt wird, die einfach in sich zurückläuft, ohne sich selbst zu schneiden. Mehrfach zusammenhängende Flächen können entstehen, wenn aus einfach zusammenhängenden Unstetigkeitspunkte durch kleine Kreise ausgeschlossen werden. Schliefst man z. B. aus einer Kreisfläche einen Unstetigkeitspunkt a dadurch aus, dafs man ihn mit einem kleinen Kreise k (Fig. 36) umgiebt, so entsteht eine Fläche, die nicht mehr einfach zusammenhängend ist; denn zieht man um k herum eine geschlossene Linie m, so bildet diese für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst mit Zuziehung entweder des kleinen Kreises k, oder des äusseren Kreises n. Es können aber Flächen auch ohne alle Ausschliefsung einzelner Punkte mehrfach zusammenhängend sein, wenn sie z. B. Verzweigungspunkte besitzen und daher aus mehreren Blättern bestehen, die über die Verzweigungsschnitte hinüber sich in einander fortsetzen.

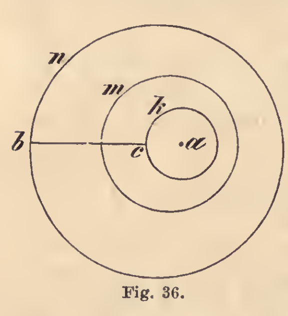


Fig. 36.

Die nun folgenden Untersuchungen beziehen sich sowohl auf die *Riemann*'schen Flächen, wie auch auf andere ganz beliebig gestaltete Flächen; doch müssen solche ausgeschlossen bleiben, welche sich entweder längs einer Linie in mehrere Blätter spalten, oder bei welchen mehrere Theile der Fläche nur in einzelnen Punkten zusammenhängen, ohne sich, wie die *Riemann*'schen Flächen es thun, mit Hülfe von Verzweigungsschnitten um solche Punkte herum zu winden. Für Flächen dieser Art (gespaltene Flächen) würden die zu entwickelnden Eigenschaften nicht im vollem Umfange gültig sein. Da wir es hier aber dennoch mit Flächen zu thun haben, deren Gestaltungen aufserordentlich mannigfaltig sein können, so müssen wir die Untersuchungen so viel als möglich auf allgemeine Betrachtungen zu stützen suchen.

Es kommt zunächst darauf an, ein bestimmtes Kennzeichen zu gewinnen, aus welchem man ersehen kann, ob eine geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet oder nicht. Zu dem Ende bemerke man, dafs zwei

Flächentheile zusammenhängend heifsen, wenn man von einem Punkte des einen Theiles auf einer ununterbrochenen Linie zu einem Punkte des andern Theiles gelangen kann, ohne eine Begrenzungslinie zu überschreiten; im entgegengesetzten Falle heifsen die Flächentheile getrennt. Wenn nun ein Theil A der Fläche vollständig begrenzt sein soll, so mufs er durch seine Begrenzung von dem übrigen Theile B der Fläche getrennt werden, sonst könnte man aus A nach B gelangen, ohne die Begrenzung von A zu überschreiten, und diese würde daher keine vollständige sein.

Wir wollen annehmen, die zu betrachtende Fläche sei selbst von einer oder mehreren Linien begrenzt, sie besitze einen Rand, der von einer oder mehreren Randcurven gebildet wird. Von diesen wollen wir stets voraussetzen, dafs sie einfach in sich zurücklaufende Linien sind, die sich nirgends verästeln. (Bei den *Riemann*'schen Flächen ist das immer der Fall, da hier eine Randcurve an jeder Stelle, auch da, wo sie in ein anderes Blatt übertritt, nur eine bestimmte Fortsetzung hat; bei gespaltenen Flächen aber würde es nicht immer der Fall sein.) Damit nun innerhalb einer solchen Fläche eine geschlossene Linie m für sich allein die vollständige Begrenzung eines Theiles der Fläche bilde, ist folgende Bedingung nothwendig und hinreichend: Durch die Linie m mufs von der gegebenen Fläche ein Theil abgetrennt werden, welcher keine der ursprünglichen Randcurven enthält. Man kann nun zeigen, dafs diese Bedingung erfüllt ist, wenn man von irgend einem Punkte der Linie m aus nur auf der einen Seite an den Rand der Fläche gelangen kann, ohne die Linie m zu überschreiten; dafs dagegen, wenn dies zu beiden Seiten der Linie m möglich ist, diese keine vollständige Begrenzung bildet.

Denkt man sich nämlich die Fläche längs der Linie m durchgeschnitten, so sind zwei Fälle möglich: entweder wird die Fläche durch den Schnitt in getrennte Theile zerlegt, oder nicht. In dem letzteren Falle wird kein Theil der Fläche abgetrennt, also kann auch m nicht die Begrenzung eines Theiles bilden. Da aber in diesem Falle alle Theile der Fläche sich noch im Zusammenhange befinden, so kann man von m aus zu beiden Seiten an den Rand der Fläche gelangen.

Wird im entgegengesetzten Falle die Fläche durch den Schnitt längs m in getrennte Theile getheilt, so zerfällt sie nur in zwei Theile A und B, da längs einer und derselben Seite von m nirgends eine Unterbrechung des Zusammenhanges stattgefunden hat. Nun können entweder beide Theile A und B ursprüngliche Rand-

curven der Fläche enthalten, oder nur der eine dieser Theile. Enthalten beide Theile Randcurven, so ist keiner von ihnen von m allein begrenzt; in diesem Falle kann man wieder von m aus zu beiden Seiten an einen Rand der Fläche kommen. Enthält dagegen nur der eine Theil B eine oder mehrere Randcurven, der andere A nicht, so bildet nun m für sich allein die vollständige Begrenzung von A, und jetzt kann man nur auf der einen Seite von m, nämlich nur in B, an den Rand der Fläche gelangen, auf der anderen in A nicht. Demnach bildet in der That eine geschlossene Linie m für sich allein eine vollständige Begrenzung oder nicht, je nachdem man von m aus nur auf einer Seite oder auf beiden Seiten an einen Rand der Fläche gelangen kann. (Vgl. hiezu Fig. 36, wo man von einem beliebigen Punkte der Linie m aus auf der einen Seite an den Randtheil k, auf der andern an den Randtheil n gelangen kann.)

Dieses Kennzeichen lässt sich unmittelbar nicht anwenden auf ganz geschlossene Flächen, die, wie z. B. eine Kugelfläche, gar keine Begrenzung haben. Man kann aber einer solchen Fläche dadurch eine Begrenzung geben, dafs man aus ihr an irgend einer Stelle einen unendlich kleinen Kreis, oder, was dasselbe ist, einen einzigen Punkt herausgenommen denkt. (Man denke sich etwa ein Blatt der Fläche an irgend einer Stelle mit einer Nadel durchstochen.) Dieser Punkt oder die Peripherie des unendlich kleinen Kreises bildet dann die Begrenzung oder den Rand der Fläche. Wir werden in Zukunft eine geschlossene Fläche stets in dieser Weise durch einen Punkt begrenzt voraussetzen, der übrigens an jeder beliebigen Stelle der Fläche angenommen werden kann. Dadurch wird dann das obige Kennzeichen auch auf geschlossene Flächen anwendbar. Es mögen nun zur Verdeutlichung einige Beispiele angeführt werden.

1) Eine Kugelfläche ist einfach zusammenhängend. Denn zieht man auf ihr irgend eine geschlossene Linie m und nimmt irgendwo auf der Fläche einen Punkt x an, der zur Begrenzung dient, so kann man von m aus immer nur auf der einen Seite nach x gelangen, niemals auch gleichzeitig auf der andern Seite; daher bildet jede geschlossene Linie m für sich allein eine vollständige Begrenzung.

2) Hat eine Fläche einen Verzweigungspunkt a, in welchem n Blätter der Fläche zusammenhängen, und begrenzt man ein Flächenstück durch eine Linie, welche den Punkt a in n Umläufen umgiebt und dadurch sich schliefst, so ist ein so begrenztes

Flächenstück einfach zusammenhängend. Denn wie man darin auch eine geschlossene Linie ziehen mag, immer kann man nur auf der einen Seite derselben an den Rand der Fläche gelangen.

3) Eine aus zwei Blättern bestehende, im Unendlichen geschlossene Fläche, die zwei Verzweigungspunkte a und b (Fig. 37) besitzt, welche durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sind, ist eine einfach zusammenhängende Fläche. — Man kann hier nur dreierlei Arten von geschlossenen Linien ziehen: solche die keinen, solche die einen, und solche die zwei Verzweigungspunkte umgeben. Die erste und letzte Art sind nicht wesentlich von einander verschieden, denn je nachdem man eine solche Linie m oder n als Begrenzung des inneren oder äufseren Flächentheils ansieht, umgiebt sie entweder beide Verzweigungspunkte oder keinen. Eine solche Linie wie m oder n bildet aber stets eine vollständige Begrenzung, denn man kann von ihr immer nur auf der einen Seite nach dem beliebig anzunehmenden Begrenzungspunkte gelangen. Eine geschlossene Linie endlich, welche nur einen Verzweigungspunkt, z. B. a umgiebt, geht zweimal um denselben herum, da sie beim Überschreiten des Verzweigungsschnittes in das zweite Blatt tritt und daher, um in das erste zurück zu gelangen und sich zu schliefsen, den Verzweigungsschnitt noch einmal überschreiten mufs. Dann aber bildet sie ebenfalls eine vollständige Begrenzung.

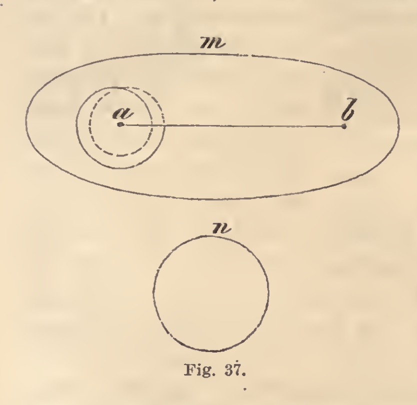


Fig. 37.

4) Die vorige Fläche wird zu einer mehrfach zusammenhängenden, sobald sie in jedem Blatte durch eine geschlossene Linie begrenzt wird (h und k Fig. 38; die punktirte Linie verläuft im zweiten Blatte); denn jetzt bildet eine um a und b im ersten Blatte herumgehende Linie m keine vollständige Begrenzung, da man von ihr zu beiden Seiten an den Rand der Fläche gelangen kann: nämlich auf der einen Seite nach k direct, auf der andern nach h über den Verzweigungsschnitt hinüber.

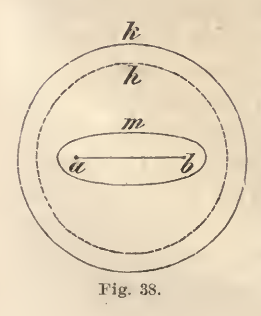


Fig. 38.

5) Eine aus zwei Blättern bestehende, im Unendlichen geschlossene Fläche, welche vier, paarweise durch Verzweigungsschnitte ab, cd verbundene Verzweigungspunkte besitzt, ist mehrfach zusammenhängend (Fig. 39). Denn zieht man eine Linie m, welche die Punkte a und b im ersten Blatte umgiebt, so kann man von derselben zu beiden Seiten nach dem beliebig anzunehmenden Begrenzungspunkte x gelangen. Liegt derselbe etwa im ersten Blatte, so geschieht dies auf der einen Seite direct, auf der andern Seite aber, indem man den Verzweigungsschnitt ab überschreitet. Dadurch gelangt man in das zweite Blatt und kann, ohne die Linie m zu treffen, da diese ganz in dem ersten Blatte verläuft, den andern Verzweigungsschnitt cd erreichen; überschreitet man ihn, so kommt man wieder in das erste Blatt zurück und gelangt so ebenfalls nach x.

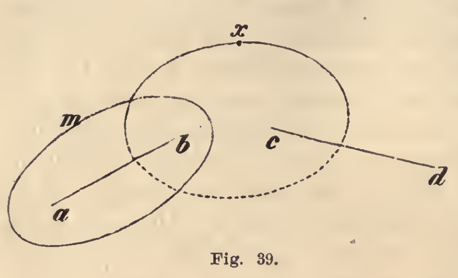


Fig. 39.

§ 47.

Von der gröfsten Wichtigkeit ist es nun, dafs man eine mehrfach zusammenhängende Fläche durch Hinzufügung gewisser Begrenzungslinien in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann. Wie sich später (§ 56) ergeben wird, ist dies bei einer *Riemann*'schen Fläche immer möglich, wenn diese eine endliche Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten hat, und ihre Randcurven ein endliches Liniensystem (im Sinne des § 50) bilden. Diese neuen Begrenzungslinien heifsen nach *Riemann* Querschnitte. Unter einem Querschnitt wird nämlich im Allgemeinen eine Linie verstanden, welche in einem Punkte einer Begrenzung beginnt, in das Innere der Fläche hineingeht und, indem sie nirgends weder eine andere Begrenzungslinie, noch auch sich selbst überschreitet, in einem Punkte einer Begrenzung endigt. Damit der Inhalt und die Tragweite dieser Definition deutlich hervortrete, betrachten wir die verschiedenen Arten der Querschnitte etwas näher. Ein Querschnitt kann einmal zwei Punkte der nämlichen Randcurve mit einander verbinden (ab Fig. 40), sodann zwei auf verschiedenen Randcurven liegende Punkte (cd). Er kann auch in demselben Punkte einer Begrenzungslinie endigen,

in dem er begonnen hat ($efge$), also eine geschlossene Linie sein. Dies ist namentlich der Fall, wenn in einer geschlossenen Fläche ein Querschnitt zu ziehen ist; denn da bei einer solchen die ursprüngliche Begrenzung nur aus einem einzigen Punkte besteht (§ 46), so mufs der Querschnitt in diesem beginnen und in ihm auch endigen, wenn nicht der sogleich zu erwähnende Fall eintritt, dafs er in einem Punkte seines früheren Laufes endigt. Es wurde nämlich schon bemerkt, dafs die Querschnitte als Begrenzungslinien zu betrachten sind, die zu den schon vorhandenen Begrenzungslinien hinzukommen. Wenn daher ein Querschnitt angefangen worden ist, so werden seine Punkte sofort als einer neu hinzugekommenen Begrenzung angehörig betrachtet, und da nun der Querschnitt nur in einem Punkte einer Begrenzung zu endigen braucht, so kann er auch in einem seiner früheren Punkte endigen ($abcd$ Fig. 41).

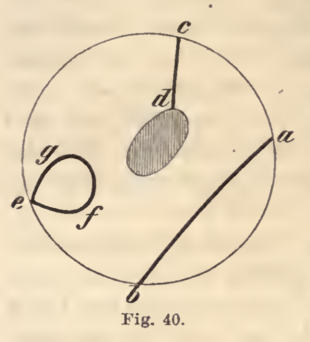


Fig. 40.

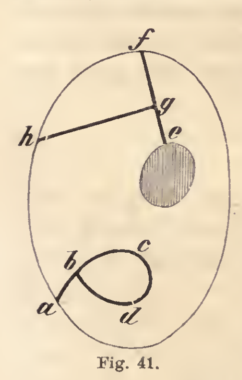


Fig. 41.

Aus demselben Grunde, weil nämlich jeder schon gezogene Querschnitt mit zur Begrenzung gehört, kann ein folgender Querschnitt auch in einem Punkte eines früheren anfangen oder endigen (Fig. 41, wo ef ein früherer, und gh ein darauf folgender Querschnitt ist). Schliefslich ist noch Folgendes hervorzuheben. Da ein Querschnitt niemals eine Begrenzungslinie überschreiten darf, so darf er auch niemals einen früheren Querschnitt überschreiten. Wenn daher eine zwei Begrenzungspunkte verbindende Linie einen früheren Querschnitt durchschneidet, so bildet eine solche nicht einen, sondern zwei Querschnitte, indem einer in dem Schnittpunkte aufhört, und an derselben Stelle ein neuer beginnt. So bilden z. B. in Fig. 42 die beiden Linien ab und cd nicht zwei, sondern drei Querschnitte, nämlich jenachdem ab oder cd zuerst gezogen wurde, ent-

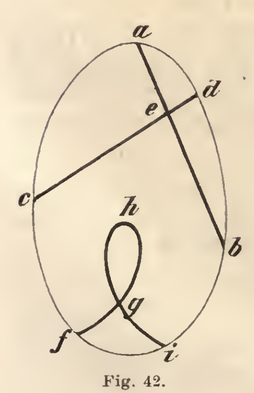


Fig. 42.

weder *ab*, *ce*, *ed* oder *cd*, *ae*, *eb*. Ähnlich werden von der Linie *fghi* zwei Querschnitte gebildet, nämlich entweder *fghg* und *gi*, oder *ighg* und *gf*.

In allen Fällen ist ein Querschnitt wie ein in der Fläche wirklich ausgeführter Schnitt zu betrachten, sodafs in einem solchen allemal zwei Begrenzungslinien vereinigt sind (die beiden durch den Schnitt hervorgebrachten Ränder), von denen die eine dem auf der einen Seite, die andere dem auf der andern Seite des Querschnittes anliegenden Flächentheile als Begrenzungslinie angehört.

Was nun die Möglichkeit anbetrifft, mehrfach zusammenhängende Flächen durch Querschnitte in einfach zusammenhängende umzuwandeln, so mag dieselbe zunächst in einigen einfachen Fällen zur Anschauung gebracht werden. Zieht man z. B. in der durch die Linien *k* und *n* begrenzten Fläche (Fig. 43) einen Querschnitt *bc* und rechnet beide Seiten desselben mit zur Begrenzung, indem man sich die Fläche längs *bc* wirklich durchgeschnitten denkt, so kann man keine geschlossene Linie mehr ziehen, welche *k* umgiebt, sondern jede geschlossene Linie bildet für sich allein eine

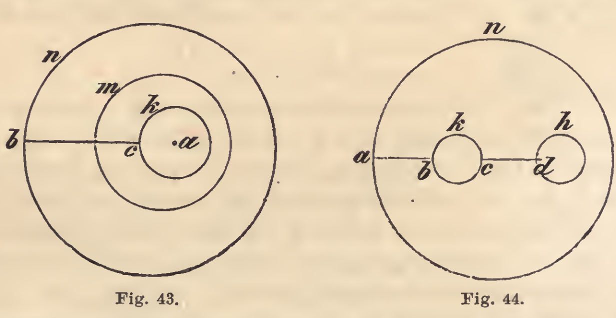


Fig. 43. Fig. 44.

vollständige Begrenzung. Dasselbe wird bei der durch die Linien *h*, *k*, *n* begrenzten Fläche (Fig. 44) durch zwei Querschnitte *ab*,

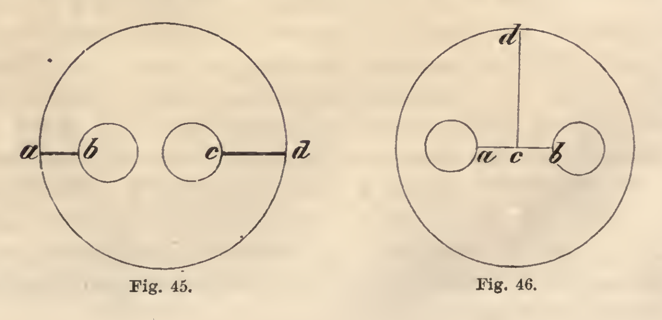


Fig. 45. Fig. 46.

cd geleistet. In dem letzteren Beispiele bemerke man zugleich, dafs die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche auf mehrfache Weise, immer aber durch zwei Querschnitte *ab*, *cd* bewerkstelligt werden kann, z. B. auch so, wie Fig. 45 und 46 zeigen.

§ 48.

Wir gehen jetzt dazu über, die Zerlegbarkeit einer mehrfach zusammenhängenden Fläche in eine einfach zusammenhängende auch im Allgemeinen zu untersuchen, und beweisen dazu zunächst eine Reihe vorbereitender Sätze.

I. Wenn eine Fläche T durch irgend einen Querschnitt ab nicht in getrennte Theile zerlegt wird, so ist sie mehrfach zusammenhängend.

Beweis. Nehmen wir zuerst an, die Endpunkte a und b des Querschnittes liegen beide auf der ursprünglichen Begrenzung von T, wobei jedoch das Zusammenfallen von a und b nicht ausgeschlossen sein möge. Da der Querschnitt ab der Annahme nach die Fläche nicht in getrennte Theile theilt, so hängen seine beiden Seiten zusammen, und man kann von einem Punkte c desselben aus eine geschlossene Linie m ziehen, welche von der einen Seite des Querschnittes durch das Innere der Fläche auf die andere Seite führt*). Eine solche Linie m aber bildet für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung, denn man kann von c aus zu beiden Seiten von m längs des Querschnittes an den Rand von T, nämlich nach a und nach b gelangen. Mithin ist T wirklich mehrfach zusammenhängend. — Dasselbe findet statt, wenn der die Fläche nicht zerstückende Querschnitt ein solcher ist, der in einem Punkte seines früheren Laufes endigt. (Vgl. Fig. 41, *abcd*.) Denn alsdann mufs man auch von einem auf dem geschlossenen Theile des Querschnittes liegenden Punkte c aus eine geschlossene Linie m ziehen können, die von der einen Seite des Querschnittes zur andern führt**). Eine solche geschlossene Linie m aber bildet

*) Dies ist hier und ebenso auch später immer so zu verstehen, dafs die Linie m eine geschlossene sein würde, wenn der Querschnitt nicht vorhanden wäre.

**) Dies ist möglich, wenn z. B. innerhalb des geschlossenen Theiles *bcd* des Querschnittes ein Verzweigungsschnitt sich befindet, den die Linie m überschreiten kann, wodurch sie in ein anderes Blatt gelangt, in welchem sie dem Querschnitt nicht begegnet, und wenn sie mittelst eines andern Verzweigungsschnittes zu dem Ausgangspunkte zurück gelangen kann.

wieder nicht eine vollständige Begrenzung, da man von c aus zu beiden Seiten von m längs des Querschnittes an den Rand der Fläche, nämlich nach a, gelangen kann. (In Fig. 41 sind diese beiden Wege cba und $cdba$.)

II. In einer mehrfach zusammenhängenden Fläche ist es allemal möglich, einen Querschnitt zu ziehen, der die Fläche nicht in getrennte Theile theilt.

Beweis. Da die Fläche mehrfach zusammenhängend ist, so giebt es in ihr mindestens eine geschlossene Linie m, die für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung bildet, und von der man also nach beiden Seiten an den Rand der Fläche kommen kann (§ 46). Man kann daher von einem Punkte c der Linie m aus zwei Linien ca und cb ziehen, die auf verschiedenen Seiten der Linie m durch das Innere der Fläche gehen und in den Punkten a und b des Randes endigen (wobei a und b auch zusammenfallen können). Diese beiden Linien bilden dann zusammen einen Querschnitt ab, da sie zusammen als eine Linie betrachtet werden können, die in einem Randpunkte a beginnt und, ohne irgendwo eine Begrenzungslinie zu überschreiten, in einem Randpunkte b endigt. Dieser Querschnitt aber zerstückt die Fläche nicht, denn man kann längs der Linie m selbst von der einen Seite des Querschnittes auf dessen andere Seite gelangen, sodafs diese beiden Flächentheile zusammenhängen und nicht getrennt sind.

Anmerkung. Das Vorige lehrt zugleich, wie in einer mehrfach zusammenhängenden Fläche ein dieselbe nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden kann, wenn man in der Fläche eine geschlossene Linie kennt, die für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung bildet.

III. Eine aus einem Stücke bestehende Fläche kann durch einen Querschnitt höchstens in zwei Stücke zerfällt werden.

Beweis. Entweder hängen die zu beiden Seiten des Querschnittes liegenden Flächentheile zusammen, dann zerstückt der Querschnitt die Fläche gar nicht; oder sie hängen nicht zusammen, dann liegen jene Flächentheile in getrennten Stücken. Betrüge nun die Anzahl der letzteren mehr als zwei, so müfste in den an der nämlichen Seite des Querschnittes liegenden Flächentheilen selbst eine Unterbrechung des Zusammmenhanges eintreten, was nicht der Fall ist, da der Querschnitt nirgends eine Begrenzungslinie überschreitet*).

*) Bei einem Querschnitte, der in einem Punkte seines früheren Laufes endigt, besteht die eine Seite aus den von innen an den ge-

IV. Eine einfach zusammenhängende Fläche wird durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Theile getheilt, von denen jeder für sich wieder einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Der erste Theil dieses Satzes folgt unmittelbar aus I. und III., denn wenn irgend ein Querschnitt die Fläche nicht zerstückte, so könnte diese nicht einfach zusammenhängend sein, und in mehr als zwei Theile kann die Fläche nicht zerfallen. Dafs aber jeder der entstandenen Theile wieder für sich einfach zusammenhängend sein mufs, ist ohne Weiteres klar; denn da in der unzertheilten Fläche jede geschlossene Linie für sich eine vollständige Begrenzung bildet, so gilt dasselbe auch von jeder geschlossenen Linie, die ganz innerhalb eines der entstandenen Theile verläuft.

V. Eine einfach zusammenhängende Fläche zerfällt durch q Querschnitte in $q+1$ getrennte Theile, von denen jeder für sich einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Wenn man, nachdem die Fläche zuerst durch einen Querschnitt nach IV. in zwei getrennte Theile zerlegt ist, einen neuen Querschnitt zieht, so kann dieser, da er den ersten Querschnitt nicht überschreiten darf (§ 47), nur in dem einen der beiden entstandenen Theile verlaufen; diesen aber zertheilt er in zwei Theile, sodafs zwei Querschnitte die Fläche in drei Theile theilen. Diese sind alle wieder für sich einfach zusammenhängend. Zieht man nun aufs Neue einen Querschnitt, so wird wieder nur einer der schon vorhandenen Theile in zwei zerlegt, und ebenso wird durch jeden folgenden Querschnitt die Anzahl der Theile nur um Eins vermehrt. Demnach sind am Ende, nachdem q Querschnitte gezogen worden sind, $q+1$ getrennte Theile vorhanden; und diese sind alle nach IV. für sich einfach zusammenhängend.

Zusatz. Hieraus folgt unmittelbar: Ist von Anfang an ein Flächensystem vorhanden, das aus α getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen besteht, so wird dieses durch q Querschnitte in $\alpha+q$ ebenso beschaffene Theile zertheilt.

VI. Wenn eine Fläche durch jeden Querschnitt in getrennte Theile getheilt wird, so ist sie einfach zusammenhängend. — Denn wäre sie mehrfach zusammenhängend, so könnte sie nach II. nicht durch jeden Querschnitt zerstückt werden.

VII. Wenn eine Fläche T durch irgend einen bestimmten Querschnitt Q in zwei getrennte Theile A und B getheilt wird,

schlossenen Theil anstofsenden Flächentheilen, die andere Seite aus den übrigen Flächentheilen.

von denen jeder für sich einfach zusammenhängend ist, so ist auch T einfach zusammenhängend.

Beweis. Wir zeigen, dafs unter den gemachten Voraussetzungen jeder in T gezogene Querschnitt diese Fläche zerstücken mufs. Dies ist zuerst klar von jedem Querschnitte, der ganz innerhalb A oder B liegt, also den Q nicht überschreitet; denn verläuft ein solcher z. B. ganz innerhalb A, so zerlegt er A in zwei getrennte Theile (IV.), von denen der an Q anstofsende mit B zusammen einen Theil von T, der andere einen zweiten von dem vorigen getrennten Theil von T bildet. Überschreitet aber ein Querschnitt Q' den Q ein oder mehrere Male, so wird er durch die Durchschnittspunkte in Stücke zerlegt, welche Querschnitte entweder in A oder in B bilden und daher (IV.) diese Theile wiederum in getrennte Theile zerlegen. Man kann also weder in A noch in B von der einen Seite des Q' auf dessen andere Seite gelangen. Dann ist das aber auch in T, d. h. mit Hülfe einer Überschreitung des Q, nicht möglich, da man dabei immer nur aus A nach B oder umgekehrt gelangt. Demnach zerstückt Q' die Fläche T ebenfalls. Da diese nun durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Theile zerlegt wird, so ist sie nach VI. einfach zusammenhängend.

VIII. Wenn eine mehrfach zusammenhängende Fläche T durch einen Querschnitt in zwei getrennte Theile zerlegt wird, so ist von diesen mindestens der eine wieder mehrfach zusammenhängend. — Denn wären beide einfach zusammenhängend, so könnte T nach VII. nicht mehrfach zusammenhängend sein.

IX. Wenn eine aus einem Stücke bestehende Fläche durch q Querschnitte in $q + 1$ Theile zerfällt wird, von denen jeder für sich einfach zusammenhängend ist, so ist sie selbst einfach zusammenhängend.

Beweis. Jeder der gezogenen Querschnitte mufs den Theil, in welchem er verläuft, in zwei getrennte Theile theilen, denn wenn auch nur ein einziger dies nicht thäte, so würden, da ein Querschnitt nach III. einen Theil niemals in mehr als zwei Theile theilen kann, am Ende weniger als $q + 1$ getrennte Theile vorhanden sein. Wäre nun die gegebene Fläche mehrfach zusammenhängend, so würde der erste Querschnitt nach VIII. höchstens einen einfach zusammenhängenden Theil abschneiden können, während der andere mehrfach zusammenhängend bleibt. Nimmt man nun an, um den günstigsten Fall hervorzuheben, dafs der Querschnitt jedesmal in dem mehrfach zusammenhängenden Theile an-

gebracht wird, und so, dafs von diesem ein einfach zusammenhängendes Stück abgelöst wird, so würde am Ende ein Theil übrig bleiben, der nicht einfach zusammenhängend ist. Überhaupt würden bei jeder Zerschneidungsart entweder weniger als $q + 1$ Theile vorhanden sein, oder mindestens einer dieser Theile würde mehrfach zusammenhängend sein müssen.

§ 49.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem folgenden

Hauptsatz. Wenn eine Fläche oder ein Flächensystem T auf eine Art durch q_1 Querschnitte Q_1 in α_1 getrennte Theile, und auf eine zweite Art durch q_2 Querschnitte Q_2 in α_2 getrennte Theile getheilt wird, der Art, dafs sowohl die α_1 Theile der ersten Art, als auch die α_2 Theile der zweiten Art alle für sich einfach zusammenhängend sind, so ist allemal

$$q_1 - \alpha_1 = q_2 - \alpha_2.$$

Beweis*). Die beiden durch die Querschnitte Q_1 und Q_2 aus T erzeugten Flächensysteme mögen resp. T_1 und T_2 heifsen. Zieht man entweder in T_1 die Linien Q_2, oder in T_2 die Linien Q_1, so erhält man beide Male das nämliche Flächensystem, überhaupt die nämliche Figur. Dieses neue Flächensystem heifse $\mathfrak{T}$. Die in T_1 gezogenen Linien Q_2 bilden zwar q_2 Querschnitte in dem ursprünglichen Systeme T, allein in T_1 kann das anders sein, denn da einerseits, wenn Linien Q_2 ganz in Linien Q_1 hineinfallen, die ersteren aufhören, als Querschnitte in T_1 zu existiren, andererseits die Linien Q_2 durch die Q_1 in mehrere Theile zerlegt werden können, so kann die Anzahl der Querschnitte, die die Q_2 in T_1 wirklich bilden, kleiner oder auch gröfser als q_2 ausfallen. Ebenso kann auch die Anzahl der Querschnitte, die von den Linien Q_1 in dem Systeme T_2 gebildet werden, von q_1 verschieden sein. Wir bezeichnen die von den Linien Q_2 in T_1 gebildeten Querschnitte mit Q_2', ihre Anzahl mit q_2'; und die von den Q_1 in T_2 gebildeten Querschnitte mit Q_1', ihre Anzahl mit q_1'. Der Nerv des Beweises besteht dann darin, dafs wenn

$$q_2' = q_2 + m$$

gesetzt wird, auch

$$q_1' = q_1 + m$$

sein mufs. Um dies zu beweisen, richte man sein Augenmerk auf

*) *Riemann*, Grundlagen u. s. w. S. 6.

die Endpunkte der Querschnitte, indem man bemerke, dafs die Anzahl der Querschnitte halb so grofs ist, als die Anzahl ihrer Endpunkte*), und dafs dies durchgängig der Fall ist, sobald man nur, wenn in einen Punkt ein Anfangspunkt eines Querschnittes und ein Endpunkt eines solchen zusammenfallen, einen solchen Punkt doppelt zählt. Die Anzahl der Endpunkte der q_2 Querschnitte Q_2 beträgt demgemäfs $2q_2$; werden nun aber diese als Querschnitte Q_2' in dem bereits durch die Q_1 zerschnittenen Systeme T_1 betrachtet, so können einerseits einige Endpunkte der Q_2 aufhören, Endpunkte der Q_2' zu sein, andererseits können neue Punkte als Endpunkte der Q_2' hinzukommen. (Vgl. Fig. 47. Darin sind die Q_1 durch stärkere, die Q_2 durch schwächere Linien bezeichnet, und an den Stellen, wo eine Linie Q_1 mit einer Linie Q_2 ganz oder theilweise zusammenfällt, sind die Linien dicht nebeneinander verlaufend dargestellt.)

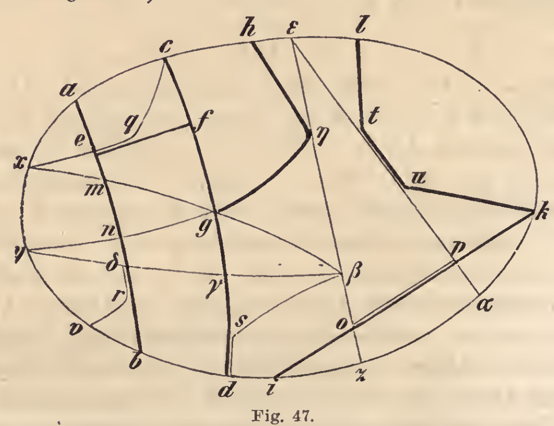


Fig. 47.

1) Ein Endpunkt eines Q_2 ist allemal zugleich ein Endpunkt eines Q_2', wenn er gar nicht in eine der Linien Q_1 hineinfällt (z. B. α oder β), aber auch dann, wenn nur ein Endpunkt eines Q_2 mit einem Endpunkte eines Q_1 coincidirt (z. B. c oder g). Dagegen ist ein Endpunkt eines Q_2 nicht auch zugleich ein Endpunkt eines Q_2', wenn der Q_2 von diesem Endpunkte aus eine Strecke weit (oder auch vollständig) mit einem Q_1 sich deckt (z. B. ds, δr, op, po). In einem solchen Falle hört nämlich der betreffende Punkt entweder ganz auf, als Endpunkt für einen Q_2' zu existiren (z. B. o oder p), oder er wird als solcher nur ver-

*) Den Anfangs- und den Endpunkt eines Querschnittes bezeichnen wir zusammen als die beiden Endpunkte desselben.

schoben. (Während z. B. der Querschnitt $ds\beta$, als ein Q_2 betrachtet, in d beginnt, fängt derselbe, als Q_2' betrachtet, erst in s an; d ist also zwar Endpunkt eines Q_2, nicht aber eines Q_2'.) Dies kann nun in zwei Fällen eintreten: entweder sind die sich deckenden Strecken beide Endstücke resp. eines Q_2 und eines Q_1 (z. B. ds), oder ein Endstück eines Q_2 coincidirt mit einem mittleren Stücke eines Q_1 (z. B. δr, op, po). Bezeichnet also

ν die Anzahl, wie oft ein Endstück eines Q_2 ein Endstück eines Q_1 deckt,

ν_2 die Anzahl, wie oft ein Endstück eines Q_2 ein mittleres Stück eines Q_1 deckt,

so ist

$$\nu + \nu_2$$

die Anzahl der Endpunkte der Q_2, welche nicht zugleich Endpunkte der Q_2' sind. Die Anzahl $2q_2$ der Endpunkte der Q_2 mufs also um $\nu + \nu_2$ vermindert werden.

Dieselbe Betrachtung wiederholt sich bei den Querschnitten Q_1. Ein Endpunkt eines Q_1 hört auf ein Endpunkt eines Q_1' zu sein, wenn ein Endstück eines Q_1 entweder mit einem Endstücke eines Q_2 (z. B. ds), oder mit einem mittleren Stücke eines Q_2 zusammenfällt (z. B. eq). Bezeichnet also ferner noch

ν_1 die Anzahl, wie oft ein Endstück eines Q_1 ein mittleres Stück eines Q_2 deckt,

so ist

$$\nu + \nu_1$$

die Anzahl der Endpunkte der Q_1, die nicht auch zugleich Endpunkte der Q_1' sind, sodafs die Zahl $2q_1$ der Endpunkte der Q_1 um $\nu + \nu_1$ vermindert werden mufs.

2) Nun treten aber neue Punkte als Endpunkte der Q_2' oder Q_1' auf, die nicht Endpunkte der Q_2 oder Q_1 sind. Betrachten wir wieder zuerst die Q_2'. Als neue Endpunkte derselben treten zuerst auf: die oben als verschoben bezeichneten Punkte (z. B. r oder s), sodann aber solche Punkte, bei denen entweder ein mittlerer Punkt eines Q_2 mit einem mittleren Punkte eines Q_1 (z. B. γ oder η), oder eine mittlere Strecke eines Q_2 mit einer mittleren Strecke eines Q_2 zusammenfällt (z. B. tu). Alle diese Fälle lassen sich als solche bezeichnen, in denen die Linien Q_1 und Q_2 in ihrem mittleren Laufe entweder zusammentreffen oder sich trennen. Es sei μ die Anzahl der Male, wie oft dies vorkommt. Über die Bestimmung dieser Zahl μ ist aber Folgendes zu bemerken. Zunächst mufs überall da, wo eine Linie Q_2 mit einer Linie Q_1 nur einen einzelnen mittleren Punkt (nicht

eine Strecke) gemein hat (z. B. bei γ oder η), dieser Punkt doppelt gezählt werden, da er ein Endpunkt eines Q_2' und zugleich Anfangspunkt eines neuen Q_2' ist. Sodann aber wollen wir festsetzen, dafs die Zahl μ so bestimmt werde, dafs ihr Werth davon unabhängig sei, ob man die Q_2 mit den Q_1 in Beziehung setzt, oder umgekehrt die Q_1 mit den Q_2. Das erfordert, wenn bei zwei Querschnitten die eine Beziehung eine gröfsere Anzahl zu zählender Punkte ergiebt, als die andere, dafs man die gröfsere Zahl zu nehmen hat. Die auf diese Art zu viel gezählten Punkte müssen dann wieder beseitigt werden. Nun kommt dieser Fall bei den Querschnitten Q_2' dann und nur dann vor, wenn in einen mittleren Punkt eines Q_2, in den ein mittlerer Punkt eines Q_1 hineintritt, zugleich eine mit dem Q_2 coincidirende Endstrecke eines anderen Q_1*) einmündet (z. B. bei e, wo fe einmündet; hier mufs e bei der Bestimmung von μ doppelt gezählt werden, weil ab und xc in e nur einen einzelnen Punkt gemein haben, und e zugleich Endpunkt von ea und em ist; aber auf xc tritt e nur einmal als ein Endpunkt, nämlich von xe auf, während der Theil ec, als ein Q_2' betrachtet, erst in q beginnt, welcher Punkt bei der Bestimmung der Zahl μ ebenfalls mit gezählt werden mufs). Dieser Fall kommt also nur dann, dann aber auch immer vor, wenn eine Endstrecke eines Q_1 mit einer mittleren Strecke eines Q_2 zusammenfällt, denn damit dies möglich sei, mufs durch den Endpunkt des Q_1 zugleich noch ein anderer Q_1**) hindurchgehen. Die Anzahl der Male, wie oft eine Endstrecke eines Q_1 mit einer mittleren Strecke eines Q_2 zusammenfällt, war oben mit ν_1 bezeichnet. Demnach befinden sich unter den zur Bestimmung der Zahl μ mitgezählten Punkten ν_1 solche, die nicht Endpunkte der Q_2' sind. Die Anzahl der neu auftretenden Endpunkte der Q_2' beträgt also

$$\mu - \nu_1 \text{***)}.$$

Ebenso verhält es sich bei der Bestimmung der Anzahl der Punkte, die neu als Endpunkte der Q_1' auftreten. Die Zahl μ bleibt, wenn sie so bestimmt wird, wie oben angegeben wurde, dieselbe wie vorhin. Unter diesen μ Punkten sind aber diejenigen

---

*) Dieser kann auch der nämliche sein, wie der zuerst genannte, wenn er in einem früheren Punkte seines Laufes endet. Vgl. die dritte Note.

**) Vgl. die vorige Note.

***) Es giebt auch Fälle, in denen die Zahl μ auf verschiedene Weise gezählt werden kann; die Differenz $\mu - \nu_1$ bleibt aber dann doch dieselbe. In Fig. 48 sind zwei solcher Fälle angegeben. Der in einem Punkte seines früheren Laufes endende Querschnitt $abcdb$ (ein Q_1) coin-

keine Endpunkte der Q_1', bei denen zugleich eine Endstrecke eines Q_2 mit einer mittleren Strecke eines Q_1 zusammenfällt (z. B. bei δ, welcher Punkt zweimal zu zählen ist; er tritt zwar als Endpunkt von δn, nicht aber von δb auf, da dieser Querschnitt, als ein Q_1' betrachtet, erst in r beginnt). Nach der obigen Bezeichnung kommt dies ν_2 Mal vor; daher ist die Anzahl der neu als Endpunkte von Querschnitten Q_1' auftretenden Punkte gleich

$$\mu - \nu_2.$$

Nun fallen nach 1) von den ursprünglichen $2q_2$ Endpunkten der Q_2 fort: $\nu + \nu_2$, und nach 2) kommen neu hinzu: $\mu - \nu_1$; die Anzahl $2q_2'$ der Endpunkte der Querschnitte Q_2' ist also

$$2q_2' = 2q_2 - (\nu + \nu_2) + \mu - \nu_1$$

und daher

$$q_2' = q_2 + \frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2}.$$

Andrerseits fallen nach 1) von den ursprünglichen $2q_1$ Endpunkten der Q_1 fort: $\nu + \nu_1$, und nach 2) kommen neu hinzu: $\mu - \nu_2$; also ist die Anzahl $2q_1'$ der Endpunkte der Q_1'

$$2q_1' = 2q_1 - (\nu + \nu_1) + \mu - \nu_2$$

und

$$q_1' = q_1 + \frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2}.$$

---

cidirt mit ef (als einem Q_2) längs der Strecke bd. Nimmt man den ersteren in dem Sinne $abdcb$, so hat man auf beiden Querschnitten zwei Punkte μ, nämlich b und d; es ist also $\mu = 2$, zugleich ist dann bd eine mittlere Strecke, mithin $\nu_1 = 0$. Nimmt man den Q_1 dagegen in dem Sinne $abcdb$, so ist b zwei Mal zu zählen, man hat also jetzt $\mu = 3$, zugleich aber ist dann db eine Endstrecke des Q_1, die mit einer mittleren Strecke des Q_2 coincidirt, also $\nu_1 = 1$. Die Differenz $\mu - \nu_1$ ist in beiden Fällen dieselbe. — Ähnlich ist es in dem andern Beispiele. Hier hat man die Wahl, entweder $lhik$ als den früheren und hfg als den späteren Querschnitt anzunehmen, oder $gfhik$ als den früheren und hl als den späteren. Längs der Strecke fhi findet Coincidenz mit dem Querschnitte zweiter Art mn statt. Wählt man nun die erste Aufeinanderfolge, so hat man drei Punkte zu zählen, nämlich h, i und f, also ist $\mu = 3$, zugleich aber ist hf eine Endstrecke, also $\nu_1 = 1$. Bei der zweiten Aufeinanderfolge sind dagegen nur f und i zu zählen, also ist $\mu = 2$, zugleich aber $\nu_1 = 0$, da nun fh eine mittlere Strecke ist,

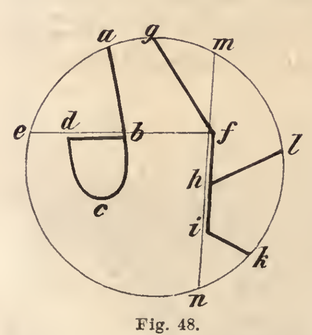


Fig. 48.

Setzt man demnach

$$\frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2} = m,$$

so ist, was zunächst zu beweisen war, gleichzeitig

$$q_2' = q_2 + m \qquad \text{und} \qquad q_1' = q_1 + m.$$

Betrachten wir, ehe wir weiter gehen, die Fig. 47 in Beziehung auf die oben geschilderten Verhältnisse vollständig. In der

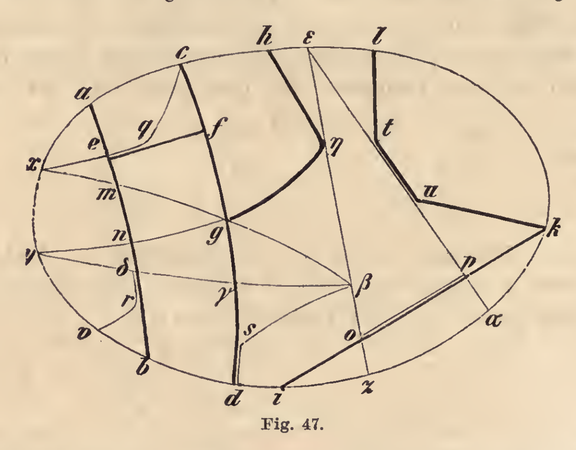


Fig. 47.

folgenden Tabelle sind in der ersten Columne die Querschnitte Q_1 aufgezählt und neben jedem in der zweiten Columne die Theile angegeben, in die er zerfällt, wenn die Fläche vorher durch die Q_2 zerschnitten gedacht wird, also die Querschnitte Q_1'. Ähnliche Bedeutung haben die mit Q_2 und Q_2' überschriebenen Columnen.

Q_1	Q_1'	Q_2	Q_2'
ab	$ae, em, mn, n\delta, rb$	xc	xe, qc
cd	$cg, g\gamma, \gamma s$	εz	$\varepsilon\eta, \eta o, oz$
ef	qf	$x\beta$	$xm, mg, g\beta$
gh	$g\eta, \eta h$	yg	yn, ng
ik	io, pk	$y\beta$	$y\delta, \delta\gamma, \gamma\beta$
kl	ku, tl	δv	rv
		βd	βs
		$\varepsilon\alpha$	$\varepsilon t, up, p\alpha$
		op	—

Hienach ist $q_1 = 6 \quad q_1' = 15$
$q_2 = 9 \quad q_2' = 18 \qquad m = 9.$

Ferner machen wir die Punkte μ namhaft und deuten jeden Punkt, der doppelt zu zählen ist, durch eine darüber gesetzte 2 an:

$$\overset{2}{e}\ \overset{2}{m}\ \overset{2}{n}\ \overset{2}{\delta}\ r\ \overset{2}{g}\ \overset{2}{\gamma}\ s\ q\ \overset{2}{\eta}\ \overset{2}{o}\ \overset{2}{p}\ t\ u;$$

es ist also

$$\mu = 23.$$

Die coincidirenden Endstrecken sind:

$$\begin{array}{llll} \text{Kategorie der} & \nu \cdots ds, & & \nu = 1 \\ \text{,,} \quad \text{,,} & \nu_1 \cdots eq, & & \nu_1 = 1 \\ \text{,,} \quad \text{,,} & \nu_2 \cdots \delta r, op, po, & & \nu_2 = 3, \end{array}$$

mithin

$$m = \frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2} = \frac{23 - 5}{2} = 9$$

wie oben.

Der übrige Theil des Beweises ist nun sehr leicht zu erledigen. Das System T_1 besteht der Annahme nach aus α_1 getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen. Aus diesem wird durch die $q_2' = q_2 + m$ Querschnitte Q_2' das System $\mathfrak{T}$ erzeugt. Das letztere besteht nach § 48, IV ebenfalls aus lauter einfach zusammenhängenden Theilen, und bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Anzahl der letzteren, so ist nach V Zus.

$$\mathfrak{A} = \alpha_1 + q_2 + m.$$

Das nämliche System $\mathfrak{T}$ wird auch aus T_2 durch die $q_1' = q_1 + m$ Querschnitte Q_1 erzeugt. Da aber T_2 der Annahme nach aus α_2 getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen besteht, so hat man auch

$$\mathfrak{A} = \alpha_2 + q_1 + m.$$

Mithin ist
$$\alpha_1 + q_2 + m = \alpha_2 + q_1 + m$$
oder
$$q_2 - \alpha_2 = q_1 - \alpha_1.$$

Anmerkung. Man kann den Beweis dieses Satzes, nachdem man sich von den dabei zu berücksichtigenden Umständen Rechenschaft gegeben hat, kürzer in folgender Art führen*). Man nehme zunächst an, dafs die Linien Q_1 und Q_2 nur das mit einander gemeinsam haben, dafs eine Linie der einen Art eine der andern Art einfach durchkreuzt, und zwar so, dafs der Kreuzungspunkt nicht ein Endpunkt eines Querschnittes ist. Kommt dann ein solcher Fall k Mal vor, so hat man nach den obigen Erörterungen und mit Anwendung der früheren Bezeichnungen

*) *Neumann,* Vorlesungen über Riemann's Theorie u. s. w. S. 296.

$$2q_2' = 2q_2 + 2k, \qquad 2q_1' = 2q_1 + 2k$$

und daher $$q_2' = q_2 + k, \qquad q_1' = q_1 + k.$$

Liegen nun aber die beiden Querschnittsysteme in beliebiger Weise gegen einander, indem die Linien Q_1 und Q_2 einander in beliebigen Punkten theils durchkreuzen, theils berühren, oder auch einander ganz oder theilweise decken, so kann man durch eine unendlich kleine Verschiebung der Linien des einen Systems bewirken, dafs das Gemeinsame entweder ganz beseitigt wird oder nur in der vorigen Annahme besteht. Sind nach einer solchen Verschiebung k Durchkreuzungspunkte vorhanden, so hat man wieder $q_2' = q_2 + k$ und $q_1' = q_1 + k$, woraus dann wie oben der Satz folgt. Gilt aber derselbe nach der unendlich kleinen Verschiebung, so mufs er auch vor derselben gelten, da durch diese weder die Anzahl der Querschnitte, noch auch die Anzahl der Theile, in welche die Fläche zerfällt, geändert wird.

§ 50.

Der von *Riemann* gegebene und im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Beweis des Hauptsatzes macht, wenn man keinen der Fälle, die möglicherweise vorkommen können, aufser Acht lassen will, umständliche Erwägungen nöthig. Der *Neumann*'sche Beweis ist zwar kürzer, doch kommt die den Haupttheil des ersteren Beweises bildende Eigenschaft, dafs gleichzeitig $q_1' = q_1 + m$ und $q_2' = q_2 + m$ ist, bei diesem nicht zur Geltung. Diese Eigenschaft ist aber auch für sich allein von Bedeutung, und wir werden sie später noch anzuwenden haben. Darum ist es vielleicht nicht überflüssig, noch einen anderen Beweis des Hauptsatzes, der einfacher ist und doch jene Eigenschaft zur Geltung bringt, hinzuzufügen. Ein solcher ist von *Lippich* gegeben worden*). Er setzt allerdings die Kenntnifs einiger Eigenschaften allgemeiner Liniensysteme voraus, zeichnet sich aber dann durch grofse Einfachheit aus und führt überdies zu einem neuen sehr bedeutsamen Satze. Wir müssen, um diesen Beweis mittheilen zu können, die folgenden Betrachtungen voranschicken**).

Digression über Liniensysteme. Wir betrachten ein System von geraden oder krummen Linien, welches im Übrigen ganz beliebig sein kann, von dem wir jedoch voraussetzen, dafs

*) *F. Lippich.* Bemerkung zu einem Satze aus Riemann's Theorie der Funktionen u. s. w. (Sitz.-Ber. d. Wien. Acad. Bd. 69. Abth. II. Januar 1874.)

**) Die Fortsetzung der Hauptuntersuchung folgt § 52.

keine Linie sich ins Unendliche erstrecke, und dafs auch keine in einem endlichen Raume unendlich viele Windungen mache. Wir nehmen ferner an, dafs die Linien entweder alle unter einander zusammenhängen, oder, wenn dies nicht der Fall ist, nur eine endliche Anzahl getrennter Theile bilden.

Von jedem Punkte einer Linie aus kann man, den Linien folgend, entweder nur einen oder mehrere Wege einschlagen. Wir unterscheiden danach auf den Linien drei Arten von Punkten: 1) Ein Punkt, von dem aus man nur einen Weg einschlagen kann, heifse ein Endpunkt, z. B. a, a_1, a_2, a_3 in Fig. 49. 2) Ein Punkt, von dem aus man auf zwei Wegen weiter gehen kann, heifse ein gewöhnlicher Punkt, z. B. b, b_1, b_2. 3) Ein Punkt, von dem aus man mehr als zwei Wege einschlagen kann, heifse ein Knotenpunkt, und zwar werde derselbe n-fach genannt, wenn n Wege von ihm ausgehen, also n Linienstücke in ihm zusammenstofsen. In Fig. 49 ist c ein dreifacher, d ein vierfacher, e ein fünffacher Knotenpunkt. Wenn nun ein Liniensystem von der obigen Beschaffenheit entweder keine oder nur eine endliche Anzahl End- und Knotenpunkte enthält, so soll es ein endliches Liniensystem genannt werden. Wir wollen ferner folgende Benennungen einführen. Eine zusammenhängende Linie, welche zwei Endpunkte und aufserdem nur gewöhnliche Punkte enthält, heifse ein einfaches Linienstück, z. B. aba_1; eine zusammenhängende Linie dagegen, welche keine anderen als gewöhnliche Punkte enthält, heifse eine einfach geschlossene Linie, z. B. A.

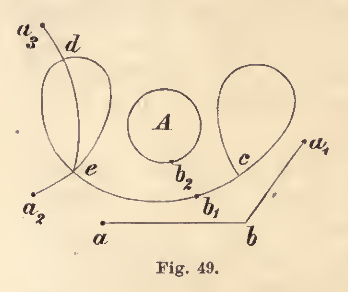


Fig. 49.

Wenn, wie sogleich geschehen soll, von einem Durchlaufen zusammenhängender Linien des Systems die Rede ist, so soll immer vorausgesetzt werden, dafs dabei kein Linienstück mehr als einmal durchlaufen wird, dafs aber das Durchlaufen stets fortgesetzt werde und nicht aufhöre, so lange sich ein noch nicht durchlaufenes und mit der zuletzt passirten Linie in Zusammenhang befindliches Linienstück zur Weiterbewegung darbietet. Dann mufs wegen der in Bezug auf die Beschaffenheit des Liniensystems gemachten Voraussetzung das Durchlaufen stets einmal ein Ende nehmen; und zwar tritt dies beim Anlangen in einem Endpunkte immer ein, bei einem gewöhnlichen Punkte dann und nur dann, wenn dieser zugleich

der Ausgangspunkt war. Was aber die Knotenpunkte anbetrifft, so soll mit dem Durchlaufen immer eine Abtrennung verbunden gedacht werden, in der Art, dafs, wenn ein Knotenpunkt zum ersten Male passirt wird, wenn man also auf einem Linienstücke in dem Knotenpunkte anlangt, und auf irgend einem andern ihn verläfst, alle übrigen hier zusammenstofsenden Linienstücke als abgetrennt betrachtet werden. Von diesen letzteren erhält dann jedes in dem Knotenpunkte einen Endpunkt, und sein Zusammenhang mit den übrigen Linien wird an dieser Stelle als aufgehoben betrachtet. Wird dies festgehalten, so hört in einem Knotenpunkte das Durchlaufen nicht auf, wenn man zu ihm zum ersten Male gelangt, aber immer dann, wenn man zum zweiten Male zu ihm zurückkommt.

Wenn ein Liniensystem gar keine Knotenpunkte enthält, so kann in ihm ein vereinzelter Endpunkt nicht vorkommen, die Endpunkte müssen vielmehr, falls solche überhaupt da sind, immer paarweise vorhanden sein. Denn beginnt man das erwähnte Durchlaufen in einem der vorhandenen Endpunkte, so kann dasselbe weder in einem Knotenpunkte (weil solche nicht vorhanden sind), noch in einem gewöhnlichen Punkte (weil der Ausgangspunkt nicht ein gewöhnlicher Punkt war) ein Ende nehmen, es kann also nur in einem Endpunkte aufhören, und da ein Ende einmal eintreten mufs, so mufs noch ein zweiter Endpunkt vorhanden sein. Demnach gelangt man, von einem Endpunkte ausgehend, stets zu einem andern Endpunkte, und weil dazwischen nur gewöhnliche Punkte passirt worden sind, so hat man ein einfaches Linienstück durchlaufen. Jeder vorhandene Endpunkt zieht also in einem endlichen Liniensysteme, das keine Knotenpunkte enthält, einen zweiten Endpunkt nach sich, der mit dem ersten zusammen ein einfaches Linienstück begrenzt. Da nun auch umgekehrt jedes einfache Linienstück zwei Endpunkte besitzt, so schliefsen wir: Wenn ein endliches Liniensystem keine Knotenpunkte enthält, so ist die Anzahl der darin vorkommenden einfachen Linienstücke halb so grofs, als die Anzahl der vorhandenen Endpunkte.

Man kann nun bei einem beliebigen endlichen mit Knotenpunkten behafteten Liniensysteme durch die oben erwähnte Operation des Abtrennens sämmtliche Knotenpunkte entfernen, indem man bei jedem Knotenpunkte alle dort zusammenstofsenden Linienstücke bis auf zwei, die im Zusammenhange belassen werden, als abgetrennt betrachtet. Dann verwandelt sich jeder Knotenpunkt

in einen gewöhnlichen Punkt und eine Anzahl von Endpunkten; und zwar: ist der Knotenpunkt ein h-facher, so verwandelt er sich in einen gewöhnlichen Punkt und $h - 2$ Endpunkte. Da bei jedem Knotenpunkte die beiden in Zusammenhang gelassenen Linienstücke ganz beliebig gewählt werden können, so gewährt die Operation des Abtrennens eine sehr grofse Mannigfaltigkeit. Ist nun die Abtrennung vollzogen, so enthält das Liniensystem keine Knotenpunkte mehr, man kann daher die alsdann darin enthaltenen einfachen Linienstücke nach dem vorigen Satze durch Abzählen der vorkommenden Endpunkte finden. Bezeichnet man nämlich die Anzahl der in dem ursprünglichen Systeme enthaltenen Endpunkte mit e, und die Anzahl der 3-, 4-, $\cdots$ n-fachen Knotenpunkte mit $k_3, k_4, \cdots k_n$, so hat man, da jeder h-fache Knotenpunkt $h - 2$ Endpunkte liefert, im Ganzen

$$e + k_3 + 2k_4 + 3k_5 + \cdots + (n-2)\,k_n$$

Endpunkte, und folglich ist die Anzahl der nach der Abtrennung vorhandenen einfachen Linienstücke gleich

$$\tfrac{1}{2}\,[e + k_3 + 2k_4 + 3k_5 + \cdots + (n-2)\,k_n]\text{*)}.$$

Diese Zahl hängt aber nur von den ursprünglich vorhandenen End- und Knotenpunkten ab und ist ganz unabhängig davon, auf welche Art die Operation des Abtrennens vorgenommen wurde, was, wie erwähnt, in sehr mannigfaltiger Weise geschehen kann. Man hat daher: Wenn in einem gegebenen endlichen Liniensysteme alle vorhandenen Knotenpunkte durch Abtrennung beseitigt werden, so enthält das System nach der Ab-

*) Die Zahl

$$e + k_3 + 2k_4 + 3k_5 + 4k_6 + 5k_7 + \cdots$$

ist nach dem Obigen eine gerade Zahl. Nimmt man von ihr zuerst die gerade Zahl

$$2k_4 + 4k_6 + \cdots$$

und dann die ebenfalls gerade Zahl

$$2k_5 + 4k_7 + \cdots$$

fort, so mufs die übrigbleibende Zahl

$$e + k_3 + k_5 + k_7 + \cdots$$

sauch gerade sein. Mithin folgt: Bei einem endlichen Liniensysteme ist die Anzahl der Endpunkte und der ungeraden Knotenpunkte zusammen stets eine gerade Zahl. Es ist also z. B. nicht möglich, ein Liniensystem zu zeichnen, welches etwa zwei Endpunkte und einen fünffachen Knotenpunkt (und aufserdem keine Knotenpunkte mehr) enthält.

trennung eine Reihe einfacher Linienstücke, deren Anzahl constant ist, nämlich unabhängig davon, wie die Abtrennung vorgenommen wurde.

Das Liniensystem kann ursprünglich einfach geschlossene Linien enthalten, man kann aber die Operation des Abtrennens immer so einrichten, dafs dabei keine neuen einfach geschlossenen Linien herausfallen. Dies könnte nämlich nur dadurch eintreten, dafs, nachdem bei einem Knotenpunkte alle Linienstücke bis auf drei abgelöst sind, dann von diesen drei letzten ein ganz bestimmtes noch abgetrennt wird. Wählt man an Stelle dieses Linienstücks eines der beiden anderen zur Abtrennung, so fällt keine einfach geschlossene Linie heraus. Wird die Abtrennung auf diese Weise ausgeführt und enthielt das System ursprünglich keine einfach geschlossenen Linien, so besteht es nach der Abtrennung aus lauter einfachen Linienstücken von constanter Anzahl.

Es ist nützlich, bei einem Systeme, das keine einfach geschlossenen Linien enthält, die Zerlegung in einfache Linienstücke auch als ein successives Durchlaufen aufzufassen, mit welchem, wie oben erörtert wurde, bei jedem Knotenpunkte, der passirt wird, die Abtrennung zu verbinden ist. Dann können nämlich niemals einfach geschlossene Linien neu entstehen, auch bei einem dreifachen Knotenpunkte nicht, weil das Durchlaufen in einem Knotenpunkte erst dann aufhört, wenn man zum zweiten Male zu ihm gelangt. Um die Zerlegung auszuführen, beginnt man das Durchlaufen in irgend einem Endpunkte, dann mufs man einmal wieder an einen Endpunkt gelangen, der entweder ursprünglich vorhanden war, oder aus einem schon passirten Knotenpunkte durch Abtrennung entstanden ist. Man hat dann also ein einfaches Linienstück durchlaufen. Hierauf beginnt man das Durchlaufen aufs Neue in einem entweder ursprünglich vorhandenen oder durch Abtrennung entstandenen Endpunkte und erhält ein zweites einfaches Linienstück; u. s. f. Sollte der Fall eintreten, dafs bei irgend einem der zu durchlaufenden einfachen Linienstücke kein Endpunkt vorhanden wäre, in welchem man das Durchlaufen beginnen könnte, so mufs in einem solchen Falle in dem noch nicht durchlaufenen Theile des Systems irgendwo ein Knotenpunkt sich vorfinden, denn sonst würde dieser Theil lauter gewöhnliche Punkte enthalten, also nur aus einfach geschlossenen Linien bestehen, während doch der Voraussetzung nach das System gar keine solche Linien enthält. In einem solchen Falle schaffe man sich in einem Knotenpunkte durch Abtrennung nur eines Linienstückes einen Endpunkt und

beginne bei diesem das Durchlaufen. Dabei mufs man freilich darauf achten, dafs wenn der Knotenpunkt ein dreifacher Punkt ist, man nicht gerade dasjenige Linienstück abtrennt, durch dessen Ablösung das Herausfallen einer einfach geschlossenen Linie bewirkt werden könnte. Man erhält demnach folgenden Satz: **Ein endliches Liniensystem, das keine einfach geschlossenen Linien enthält, zerfällt durch successives Durchlaufen, mit welchem bei jedem Knotenpunkte, der passirt wird, die Abtrennung zu verbinden ist, in lauter einfache Linienstücke, deren Anzahl immer dieselbe bleibt, wie auch das Durchlaufen, und damit die Zerlegung in die einfachen Linienstücke vorgenommen werden mag.**

§ 51.

Wir wollen nun annehmen, es befinde sich auf einer Fläche ein endliches Liniensystem L, welches folgenden zwei Bedingungen genügt:

I. Kein Endpunkt liege im Innern der Fläche, sondern alle etwa vorhandenen Endpunkte befinden sich auf dem Rande der Fläche. (Ist die Fläche geschlossen, so ist sie nach § 46 mit einem Randpunkte versehen zu denken.)

II. Alle Theile des Systems L stehen mit dem Rande der Fläche in Zusammenhang, sodafs man von jedem auf L liegenden Punkte, den Linien folgend, an einen Rand der Fläche gelangen kann.

Ein solches Liniensystem kann wohl einfach geschlossene Linien enthalten, doch mufs, damit die Bedingung II erfüllt werde, jede einfach geschlossene Linie mindestens einen Punkt mit einer Randcurve gemein haben.

Wir fügen nun zuerst die Randcurven dem System L hinzu; dann ist jeder auf dem Rande liegende Punkt von L ein Knotenpunkt des durch die Hinzufügung der Randcurven abgeänderten Systems, da in ihm mindestens drei Linienstücke, nämlich zwei der Randcurve angehörige, und mindestens ein dem System L angehöriges zusammenstofsen. Dasselbe gilt auch von dem bei einer geschlossenen Fläche zu supponirenden Randpunkte, wenn man diesen als eine unendlich kleine Randcurve sich vorstellt. Bei allen diesen auf dem Rande befindlichen Knotenpunkten vollziehen wir nun die Abtrennung, und zwar in der Art, dafs die der Randcurve angehörigen Linienstücke in Zusammenhang belassen, alle dem System L angehörigen Linienstücke aber abgetrennt werden.

(Bei einem blofsen Randpunkte müssen also alle hier einmündenden Linienstücke abgetrennt werden.) Scheiden wir alsdann die Randcurven wieder aus, so ist das System L in ein anderes verwandelt worden, welches mit M bezeichnet werde. In diesem ist nun jeder auf dem Rande liegende Punkt ein Endpunkt, und es mufs mindestens ein solcher vorhanden sein, weil sonst das System L die Bedingung II nicht erfüllt haben würde. Ferner enthält das System M keine einfach geschlossenen Linien mehr, da die in L etwa vorhandenen durch die Abtrennung beseitigt worden sind. Im Übrigen aber sind die Linien von M dieselben wie die von L.

Demnach kann das System M nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen durch successives Durchlaufen in lauter einfache Linienstücke von constanter Anzahl zerlegt werden. Aber es ist nun leicht zu zeigen, dafs diese Linienstücke nichts anderes sind, als ein auf der Fläche verzeichnetes System von Querschnitten. Denn da nach dem Obigen mindestens ein auf dem Rande liegender Endpunkt vorhanden ist, so kann das erste Linienstück von einem solchen aus durchlaufen werden. Der zweite Endpunkt, zu dem man gelangt, kann nach I nicht im Innern liegen, sondern er befindet sich entweder auch auf dem Rande, oder er ist aus einem passirten Knotenpunkte durch Abtrennung entstanden. In beiden Fällen aber ist das durchlaufene einfache Linienstück ein Querschnitt, im zweiten Falle ein solcher, der in einem Punkte seines früheren Laufes endet. Jetzt mufs es wieder (falls noch weitere Linien vorhanden sind) einen Endpunkt geben, der entweder auf dem Rande oder auf dem ersten Querschnitte liegt, weil sonst die Bedingung II nicht erfüllt sein würde. Man kann also von diesem aus ein zweites einfaches Linienstück durchlaufen, dessen zweiter Endpunkt entweder auf dem Rande oder auf dem ersten Querschnitte liegt, oder durch Abtrennung beim Passiren eines Knotenpunktes entstanden ist. Dieses zweite Linienstück ist also ebenfalls ein Querschnitt. Dasselbe wiederholt sich nun, so lange noch nicht durchlaufene Linien vorhanden sind; also bilden die einfachen Linienstücke in der That sämmtlich Querschnitte, und wir erhalten den folgenden von *Lippich* aufgestellten Satz: Jedes endliche, auf einer Fläche befindliche Liniensystem, das den Bedingungen I und II genügt, bildet ein System von Querschnitten von einer völlig bestimmten Anzahl, die immer dieselbe bleibt, auf welche Art auch immer diese Querschnitte nach und nach gezogen werden mögen.

Aus der Definition der Querschnitte (§ 47) leuchtet unmittelbar ein, dafs auch umgekehrt jedes Querschnittsystem ein Liniensystem bildet, das den Bedingungen I und II genügt.

Auf diesen Satz gestützt gestaltet sich nun der Beweis des *Riemann*'schen Hauptsatzes sehr einfach. Wir behalten dabei die Bezeichnungen des § 49 bei. Denkt man sich auf der Fläche T zuerst die Linien Q_1 und dann die Linien Q_2 gezogen, so erhält man ein aus lauter Querschnitten entstandenes Liniensystem, das also die Bedingungen I und II erfüllt. Nach dem obigen Satze bildet dies nun zugleich ein System von Querschnitten von einer völlig bestimmten Anzahl, welche mit s bezeichnet werde. Es war aber q_1 die Anzahl der Querschnitte Q_1; sind diese gezogen, so bilden die Linien Q_2 nach der früheren Bezeichnung q_2' neue Querschnitte, die Anzahl aller Querschnitte ist also auch $q_1 + q_2'$, und daher

$$q_1 + q_2' = s.$$

Werden nun umgekehrt zuerst die Querschnitte Q_2 gezogen, deren Anzahl q_2 war, und dann die Linien Q_1 hinzugefügt, welche q_1' Querschnitte bilden, so erhält man jetzt im Ganzen $q_2 + q_1'$ Querschnitte. Allein das jetzt entstandene Liniensystem ist genau dasselbe, wie vorhin, nur sind die Querschnitte, aus denen es jetzt besteht, auf eine andere Art gezogen worden, wie vorhin. Da nach dem obigen Satze die Anzahl dieser Querschnitte dennoch dieselbe geblieben sein mufs, so ist auch

$$q_2 + q_1' = s,$$

also ist

$$q_1 + q_2' = q_2 + q_1' \quad \text{oder} \quad q_2' - q_2 = q_1' - q_1.$$

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Werth dieser Differenzen mit m, so ist gleichzeitig

$$q_1' = q_1 + m \quad \text{und} \quad q_2' = q_2 + m.$$

Nachdem hiedurch der erste Haupttheil des Beweises erledigt ist, folgt das Übrige genau wie in § 49.

§ 52.

Betrachten wir nun den Fall, dafs die ursprüngliche Fläche T aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke bestehe, und dafs ferner die durch die Querschnitte Q_1 und Q_2 erzeugten Flächen T_1 und T_2 jede eine einzige einfach zusammenhängende Fläche bilde, so ist, damit dieser Fall eintreten könne, zuerst nöthig, dafs keiner der gezogenen Querschnitte die Fläche zerstücke, und damit

dies nicht eintrete, ist nach § 48, II und IV weiter erforderlich, dafs T mehrfach zusammenhängend sei und bei beiden Zerschneidungsarten bis nach Ziehung des vorletzten Querschnittes mehrfach zusammenhängend bleibe und erst durch den letzten Querschnitt einfach zusammenhängend werde. In einem solchen Falle ist nun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, mithin $q_2 - 1 = q_1 - 1$ und daher auch $q_2 = q_1$. Wir erhalten hiedurch folgenden Satz:

Wenn es möglich ist, eine mehrfach zusammenhängende Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende umzuwandeln, und wenn dies auf mehr als eine Art möglich ist, so ist die Anzahl der Querschnitte, durch welche diese Umwandlung bewirkt wird, immer die gleiche.

Aufser diesem Satze ist auch noch der folgende von gröfster Bedeutung: Wenn eine mehrfach zusammenhängende Fläche auf irgend eine bestimmte Art durch q Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann, so wird diese Verwandlung stets durch q beliebige Querschnitte bewirkt, wie diese auch gezogen werden mögen, sobald sie die Fläche nur nicht zerstücken. Wenngleich nämlich in dem vorigen Satze bewiesen worden ist, dafs die Anzahl q der Querschnitte dieselbe bleibt, wenn die Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende Fläche auf eine zweite Art möglich ist, so bleibt doch zu erwägen, ob diese Zerschneidung wirklich auf eine zweite Art bewerkstelligt werden kann; ob nicht vielmehr zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche erforderlich ist, dafs die Querschnitte auf eine bestimmte Art, nach einer bestimmten Regel gezogen werden müssen, sodafs wenn dies nicht geschieht, die Fläche unaufhörlich mehrfach zusammenhängend bleibt, wie weit man auch das Ziehen der Querschnitte fortsetzen mag, und dafs man niemals zu einer einfach zusammenhängenden Fläche gelangt. Man kann aber in der That zeigen, dafs dieser Fall nicht eintreten kann. Wir setzen also voraus, die Fläche T werde durch q in bestimmter Weise gezogene Querschnitte Q_1 in die einfach zusammenhängende Fläche T_1 verwandelt. Dann folgt zunächst aus dem vorigen Satze, wenn statt der vorigen andere Querschnitte gezogen werden, dafs die Fläche T nicht durch weniger als q Querschnitte einfach zusammenhängend werden kann. Es ist daher nach § 48, II möglich, q andere, die Fläche ebenfalls nicht zerstückende Querschnitte Q_2 zu ziehen, wodurch eine Fläche T_2 entstehen möge; es fragt sich, ob T_2 einfach zusammen-

hängend sein mufs. Man lasse wie in § 49 aus T_1 und T_2 ein neues Flächensystem $\mathfrak{T}$ auf doppelte Art entstehen, indem man einmal in T_1 die Linien Q_2, und das andere Mal in T_2 die Linien Q_1 zieht. Die Anzahl der Querschnitte, welche die Q_2 in T_1 bilden, möge wie in § 49 mit $q + m$ bezeichnet werden. Dann ist nach dem ersten Theile des Beweises für den Hauptsatz (§ 49 oder § 51) die Anzahl der Querschnitte, welche die Q_1 in T_2 bilden, ebenfalls $q + m$. Nun ist der Annahme nach T_1 eine einzige einfach zusammenhängende Fläche, welche durch $q + m$ Querschnitte in das Flächensystem $\mathfrak{T}$ verwandelt wird, mithin besteht $\mathfrak{T}$ aus $q + m + 1$ getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen (§ 48, V). Dasselbe System wird aber auch aus T_2 durch $q + m$ Querschnitte erzeugt; also hat die aus einem Stücke bestehende Fläche T_2 die Eigenschaft, dafs sie durch $q + m$ Querschnitte in $q + m + 1$ getrennte und für sich einfach zusammenhängende Theile zerlegt wird. Nach § 48, IX ist demnach T_2 wirklich einfach zusammenhängend.

Hierauf beruht nun eine Classification der Flächen und die nähere Bestimmung ihres Zusammenhanges.

Ist eine Fläche mehrfach zusammenhängend, so kann in ihr nach § 48, II ein Querschnitt gezogen werden, der sie nicht zerstückt. Wenn nun der Fall eintritt, dafs sie nach Anbringung dieses ersten Querschnittes einfach zusammenhängend geworden ist, so wird sie nach dem letzten Satze durch jeden die Fläche nicht zerstückenden Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt. In diesem Falle heifst die Fläche zweifach zusammenhängend.

Ist die Fläche aber, nachdem der erste Querschnitt gezogen wurde, noch mehrfach zusammenhängend, so kann ein neuer, nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden. Bringt dieser die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche zu Stande, so wird dasselbe durch irgend zwei andere, nicht zerstückende Querschnitte geleistet, und die Fläche heifst dann dreifach zusammenhängend.

Ist die Fläche auch nach Anbringung des zweiten Querschnittes noch mehrfach zusammenhängend, so kann wieder ein nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden, und je nachdem die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche durch drei, vier etc. Querschnitte zu Stande kommt, heifst die Fläche vierfach, fünffach etc. zusammenhängend.

Im Allgemeinen wird eine Fläche $(q + 1)$fach zusammen-

hängend genannt, wenn sie durch q Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann; und dann ist es ganz gleichgültig, wie die Querschnitte gezogen werden, wenn nur keiner derselben die Fläche zerstückt. Ist die Fläche aber einmal einfach zusammenhängend geworden, so ist es nach § 48, IV nicht mehr möglich, in ihr einen sie nicht zerstückenden Querschnitt zu ziehen.

§ 53.

Es mögen nun einige Sätze theils über Änderung oder Nicht-Änderung der Ordnung des Zusammenhanges, theils über Randcurven folgen.

I. Durch jeden eine Fläche nicht zerstückenden Querschnitt wird die Ordnung ihres Zusammenhanges um Eins erniedrigt. — Denn ist die Fläche $(q+1)$fach zusammenhängend, so folgt aus dem zweiten Satze des § 52, dafs, wie der erste nicht zerstückende Querschnitt auch gezogen sein mag, die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche stets durch $q-1$ Querschnitte zu Stande kommt, die neue Fläche also q-fach zusammenhängend ist.

II. Zieht man von einem Punkte a der Begrenzung aus in das Innere der Fläche eine sich selbst nicht treffende Linie, die in einem Punkte c im Innern der Fläche endet, so ändert eine solche Linie die Ordnung des Zusammenhanges nicht. Wird längs derselben ein Schnitt geführt, so wird dieser ein Einschnitt genannt.

Beweis. Die ursprüngliche Fläche heifse T, die durch die Linie ac abgeänderte T'. Zunächst ist klar, dafs, wenn T einfach zusammenhängend ist, T' es auch sein mufs; denn wenn in T jede geschlossene Linie für sich einen Theil vollständig begrenzt, so gilt dasselbe auch von jeder geschlossenen, in T' verlaufenden Linie, d. h. einer solchen, die ac nicht überschreitet. Sei also T mehrfach, und zwar $(q+1)$fach zusammenhängend. Dann kann in T stets ein die Fläche nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden (§ 48, II), und zwar so, dafs die Linie ac einen Theil desselben bildet. Das ist immer möglich; denn zieht man ihn nach Anleitung von § 48, II mit Hülfe einer geschlossenen Linie, die für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung bildet, so kann man ihn von dieser aus nach beiden Seiten an den Rand der Fläche auf ganz beliebige Weise führen, und also, da a auf dem Rande liegt, auch immer so, dafs ac einen Theil desselben bildet. Es sei nun dieser Querschnitt mit acb bezeichnet, und die durch

ihn aus T entstehende Fläche heifse T''. Dann ist diese q-fach zusammenhängend (I). Allein T'' entsteht auch aus T' durch Ziehen der Linie cb, und diese bildet in T' einen nicht zerstückenden Querschnitt, weil sie so gezogen ist, dafs die zu beiden Seiten anstofsenden Flächentheile mit einander zusammenhängen. Mithin hat T' die Eigenschaft, dafs sie durch einen nicht zerstückenden Querschnitt in eine q-fach zusammenhängende Fläche übergeht; also ist T', wie auch T es war, $(q+1)$fach zusammenhängend.

Anmerkung. Dieser Satz bleibt vollkommen gültig, wenn der innere Punkt c ein Verzweigungspunkt ist.

III. Nimmt man in einer Fläche T irgendwo einen einzelnen Punkt c heraus, so wird dadurch die Ordnung des Zusammenhanges um Eins erhöht.

Beweis. Die durch Herausnahme des Punktes c abgeänderte Fläche heifse T'. Man verbinde c mit irgend einem Punkte a der Begrenzung von T*) durch eine sich selbst nicht schneidende Linie und erzeuge dadurch eine neue Fläche T''. Dann kann die letztere auch aus T dadurch entstanden gedacht werden, dafs in dieser die Linie ac gezogen ist, die von einem Begrenzungspunkte a ausgehend in einem innern Punkte c endet, und folglich ist T'' mit T von gleicher Ordnung (II). In T' dagegen ist ac ein Querschnitt, und zwar ein nicht zerstückender, da man um c herum von der einen Seite auf die andere kommen kann. Mithin ist T' nach I von einer um Eins höheren Ordnung als T'', und also auch als T.

Anmerkung. Das Vorige verliert seine Gültigkeit nicht, wenn der herausgenommene Punkt ein Verzweigungspunkt ist.

IV. Wird in einer Fläche irgendwo eine (wirklich) geschlossene Linie gezogen, welche für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet, der entweder keinen oder höchstens einen Verzweigungspunkt (beliebig hoher Ordnung (§ 13)) enthält, und wird dann der so begrenzte Theil aus der Fläche ausgeschieden, so wird dadurch die Ordnung des Zusammenhanges um Eins erhöht. — Denn in Beziehung auf die Ordnung des Zusammenhanges kann sich nichts ändern, wenn die die auszuscheidende Stelle begrenzende Randcurve sich mehr und mehr zusammenzieht. Schrumpft sie aber zuletzt in einen Punkt zusammen, so hat man

*) Ist T eine geschlossene Fläche, so wird nach § 46 angenommen, dafs sie bereits einen Begrenzungspunkt a besitzt.

den vorigen Fall. Dieser Satz gilt daher, wenn die auszuscheidende Stelle entweder keinen oder nur einen Verzweigungspunkt enthält. Enthält sie aber mehr als einen, so würde es nicht mehr möglich sein, die Randcurve in einen Punkt sich zusammenziehen zu lassen.

Zusatz. Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche hat man nach § 46 irgendwo einen Begrenzungspunkt zu supponiren. Dieser darf auch selbst ein Verzweigungspunkt sein. Wird nun aus einer solchen Fläche ein Stück ausgeschieden, das diesen Begrenzungspunkt, aufserdem aber keinen Verzweigungspunkt enthält, so ändert sich die Ordnung des Zusammenhanges nicht. — Denn man kann die die auszuscheidende Stelle begrenzende Randcurve in diesem Falle in den Begrenzungspunkt sich zusammenziehen lassen und erhält dann die ursprüngliche Fläche wieder.

V. Wenn eine $(q+1)$fach zusammenhängende Fläche T durch einen Querschnitt R in zwei getrennte Theile A und B zerlegt wird, so hat jeder der letzteren eine endliche Ordnung des Zusammenhanges, und sind r und s die Querschnittszahlen, welche diese Ordnungen bestimmen, so ist $r+s=q$.

Beweis. Durch $q+1$ Querschnitte, von denen die ersten q die Fläche nicht zerstücken, zerfällt T in zwei einfach zusammenhängende Stücke. Wenn aber der zerstückende Querschnitt R zuerst gezogen wird, so kann man aus dem *Riemann*'schen Hauptsatze nicht unmittelbar auf die Richtigkeit der obigen Behauptung schliefsen, da der Hauptsatz das, was hier erst bewiesen werden soll, dafs nämlich auch jetzt nach Anbringung einer endlichen Anzahl von Querschnitten am Ende wieder einfach zusammenhängende Stücke vorhanden sind, schon voraussetzt. Nun bemerke man, dafs alle in A verlaufenden Querschnitte sich so anbringen lassen, dafs sie den Querschnitt R entweder gar nicht oder nur in einem seiner Endpunkte treffen. Denn da R, abgesehen von den Endpunkten, ganz im Innern der Fläche liegt, und daher zu beiden Seiten desselben eine von Randcurven freie Zone sich befindet, so kann man bei allen etwa in R einmündenden Querschnitten die auf R liegenden Endpunkte längs der Linie R verschieben, bis sie in einen Endpunkt von R hineinfallen. Alsdann aber ist jeder Querschnitt, der A nicht zerstückt, auch in T ein nicht zerstückender Querschnitt. Daraus folgt, dafs die Anzahl r der in A möglichen nicht zerstückenden Querschnitte nicht gröfser als q sein kann; denn sonst wäre es auch möglich, in T mehr als q nicht zerstückende Querschnitte zu ziehen, gegen die Voraus-

setzung, dafs diese Fläche $(q+1)$ fach zusammenhängend ist (§ 52). Also ist r eine endliche Zahl; und wenn nun nach Anbringung dieser r Querschnitte ein weiterer nicht zerstückender Querschnitt in A nicht mehr möglich ist, so ist A einfach zusammenhängend geworden (§ 48, VI). Ganz dasselbe gilt von B. Auch hier können alle Querschnitte so gezogen werden, dafs sie in T ebenfalls Querschnitte bilden, und ist s die Anzahl der in B möglichen nicht zerstückenden Querschnitte, so kann s nicht gröfser als q sein und ist daher eine endliche Zahl. Durch Anbringung dieser s Querschnitte wird B einfach zusammenhängend. Werden alle diese Querschnitte gezogen, so hat man mit Hinzuziehung von R durch $r+s+1$ Querschnitte zwei einfach zusammenhängende Stücke gewonnen. Daher ist nun nach dem *Riemann*'schen Hauptsatze

$$r+s=q,$$

und von diesen q Querschnitten verlaufen r ganz in A, die übrigen s ganz in B.

VI. Wird eine $(q+1)$fach zusammenhängende Fläche T durch v nicht zerstückende und s zerstückende Querschnitte, welche in beliebiger Reihenfolge gezogen werden können, in $s+1$ getrennte Theile $A_0, A_1, A_2, \cdots A_s$ zerlegt, deren Ordnungen durch die Querschnittszahlen $r_0, r_1, r_2, \cdots r_s$ angegeben werden, so ist

$$q=v+r_0+r_1+r_2+\cdots+r_s.$$

Beweis. Da nach dem vorigen Satze eine Fläche von endlicher Ordnung durch einen zerstückenden Querschnitt stets in zwei Theile zerfällt, die wieder von endlicher Ordnung sind, so gilt das Letztere auch, wenn in T vor der Zerstückung eine Reihe nicht zerstückender Querschnitte gezogen werden, und eben so auch, wenn jeder der entstandenen Theile auf ähnliche Art weiter zertheilt wird. Daher sind $r_0, r_1, \cdots r_s$ endliche Zahlen, von denen keine gröfser als q ist, in welcher Reihenfolge man auch die $v+s$ Querschnitte gezogen haben mag. Wird nun noch jeder Theil A durch die betreffenden r Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, so hat man am Ende $s+1$ einfach zusammenhängende Stücke, welche im Ganzen durch

$$v+s+r_0+r_1+r_2+\cdots+r_s$$

Querschnitte entstanden sind. Man erhält aber ebenfalls $s+1$ einfach zusammenhängende Stücke, wenn T zuerst durch q Querschnitte einfach zusammenhängend gemacht und dann durch s

weitere Querschnitte in $s+1$ Stücke zerschnitten wird. Demnach ist

$$q+s=v+s+r_0+r_1+\cdots+r_s$$

oder

$$q=v+r_0+r_1+\cdots+r_s.$$

VII. Wenn eine $(q+1)$fach zusammenhängende Fläche durch m Querschnitte in zwei getrennte Theile zerlegt wird, von denen der eine S einfach zusammenhängend ist, so ist der andere, der T' heifse, $(q-m+2)$fach zusammenhängend, d. h. er erfordert nur noch $q-(m-1)$ Querschnitte zur Umwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche.

Beweis. Sei x die Anzahl der Querschnitte, welche T' in eine einfach zusammenhängende Fläche T_0' verwandeln. Führt man diese Schnitte aus, so erhält man durch $m+x$ Querschnitte zwei einfach zusammenhängende Flächen T_0' und S. Wird aber die ursprüngliche Fläche zuerst durch q Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt, und dann diese durch einen weiteren Querschnitt in zwei getrennte Theile getheilt, so hat man wieder zwei einfach zusammenhängende Flächen, hervorgebracht durch $q+1$ Querschnitte. Nach dem Hauptsatze § 49 ist dann

$$(m+x)-2=(q+1)-2,$$

also

$$x=q-(m-1).$$

VIII. Wenn eine aus einem Stück bestehende Fläche mehr als eine Randcurve besitzt, d. h. wenn ihre Begrenzung aus mehreren von einander getrennten geschlossenen Linien besteht, so ist sie mehrfach zusammenhängend.

Beweis. Sind a und b zwei auf verschiedenen Randcurven liegende Punkte, so kann man, da die Fläche in sich zusammenhängt, von a durch das Innere der Fläche nach b eine Linie ziehen. Diese ist ein Querschnitt, der aber die Fläche nicht zerstückt, denn man kann längs einer der beiden Randcurven im Innern der Fläche von der einen Seite des Querschnittes auf die andere Seite kommen. Da es also möglich ist, in der Fläche einen sie nicht zerstückenden Querschnitt zu ziehen, so ist die Fläche nach § 48, I mehrfach zusammenhängend.

IX. Hieraus folgt: Eine einfach zusammenhängende Fläche besitzt immer nur eine einzige Randcurve, d. h. ihre Begrenzung kann in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden. (Oder aber ihre Begrenzung besteht nur aus einem einzigen Punkte.) —

Wenn daher eine mehrfach zusammenhängende Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt worden ist, wobei dann die Querschnitte zu der ursprünglich vorhandenen Begrenzung als neue Begrenzungsstücke hinzugekommen sind, so müssen sie sammt der ursprünglichen Begrenzung in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden können. Dabei bildet jeder Querschnitt gleichzeitig die Begrenzung für jeden der auf beiden Seiten an ihn anstofsenden Flächentheile. Wird also die ganze Begrenzung in positiver Richtung durchlaufen, sodafs das begrenzte Gebiet stets zur Linken der Begrenzung liegt, so mufs jeder Querschnitt zwei Mal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. (Vgl. Fig. 43 bis 46 S. 178.)

X. Durch jeden Querschnitt wird die Anzahl der vorhandenen Randcurven entweder um eine vermehrt oder um eine vermindert.

Beweis. Nach den Erörterungen des § 47 bildet ein Querschnitt immer zugleich zwei Begrenzungsstücke, indem er die auf beiden Seiten an ihn anstofsenden Flächentheile gleichzeitig begrenzt. Es giebt nun nach § 47 drei Arten von Querschnitten:

1) Der Querschnitt verbindet zwei Punkte a und b der nämlichen Randcurve. Diese wird dann durch die Punkte a und b in zwei Theile getheilt, und es bildet der eine Theil mit dem einen Rande des Querschnitts eine Randcurve, der andere Theil mit dem andern Rande eine zweite. Aus einer Randcurve entstehen also zwei; es tritt eine Vermehrung der Randcurven um eine ein*).

2) Der Querschnitt verbindet zwei Punkte, die auf verschiedenen Randcurven liegen. Dann vereinigt er diese zu einer einzigen, indem seine beiden Ränder den Zusammenhang herstellen. Aus zwei Randcurven entsteht also eine; es tritt eine Verminderung der Randcurven um eine ein.

3) Der Querschnitt beginnt in einem Randpunkte und endigt in einem Punkte seines früheren Laufes. Dann bildet sein einer Rand mit der Randcurve, von der er ausgeht, zusammen eine einzige geschlossene Begrenzungslinie. Aufserdem aber bildet der innere Rand seines geschlossenen Theiles eine neue Randcurve, sodafs eine Vermehrung der Randcurven um eine eintritt.

XI. Wenn eine geschlossene Fläche (die also nur einen Begrenzungspunkt besitzt) mehrfach zusammenhängend ist, jedoch

---

*) Dies erleidet keine Änderung, wenn die Punkte a und b einander näher rücken und schliefslich zusammenfallen.

durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann, so ist die Anzahl der dazu erforderlichen Querschnitte stets eine gerade Zahl.

Beweis. Die gegebene Fläche sei $(q+1)$fach zusammenhängend, sodafs q Querschnitte sie in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Da die Fläche ursprünglich nur einen einzigen Begrenzungspunkt besitzt, so ist die Anzahl ihrer Randcurven gleich 1. Diese Zahl wird durch jeden Querschnitt nach X entweder um Eins vergröfsert oder um Eins verkleinert. Sei p die Anzahl der Querschnitte, welche eine Vermehrung, also $q-p$ die Anzahl derjenigen, welche eine Verminderung der Randcurven hervorbringen; dann ist die Anzahl der Randcurven am Ende gleich $1+p-(q-p)$. Aber da dann die Fläche einfach zusammenhängend ist, so besitzt sie wieder nur eine einzige Randcurve (IX), mithin hat man die Gleichung

$$1+p-q+p=1,$$

aus welcher

$$q=2p$$

folgt. Demnach ist q eine gerade Zahl.

§ 54.

Wenn man bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche die Anzahl ihrer Blätter, sowie ihre Verzweigungspunkte kennt, so kann man die Ordnung ihres Zusammenhanges angeben. Wir machen hiebei Gebrauch von der § 13 erwähnten Auffassungsweise, nach welcher man einen Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung betrachten kann als entstanden durch das Zusammenfallen von $m-1$ einfachen Verzweigungspunkten. Ist in diesem Sinne g die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte, n die Anzahl der Blätter und q die Anzahl der Querschnitte, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln, so kann man zwischen diesen drei Zahlen eine Beziehung finden*).

Es sei A_0 der in der geschlossenen Fläche zu supponirende Begrenzungspunkt. Wir nehmen nun noch andere $n-1$ Punkte $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$ aus der Fläche heraus, und zwar aus jedem der übrigen $n-1$ Blätter einen; am einfachsten denken wir uns diese n Punkte gerade unter einander liegend. Da nun durch die Herausnahme jedes solchen Punktes die Ordnung des Zusammenhanges

*) Vergl. zu dem Folgenden: *Roch*, Über Funktionen complexer Gröfsen. *Schlömilch's* Zeitschr. f. Math. Bd. 10, S. 177.

um Eins steigt (§ 53, III), so wird diese Ordnung im Ganzen um $n-1$ erhöht. Nach Herausnahme der $n-1$ Punkte $A_1, A_2 \cdots A_{n-1}$ sind also $q+n-1$ Querschnitte zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche erforderlich. In dieser $(q+n)$ fach zusammenhängenden Fläche ziehen wir nun Querschnitte auf folgende Art. Aus jedem Punkte A ziehe man Linien nach allen den Verzweigungspunkten, die mit A in demselben Blatte liegen. Dann entstehen in der That Querschnitte, wenn man sich erinnert, dafs man durch einen Verzweigungspunkt in alle diejenigen Blätter gelangen kann, die in diesem Punkte mit einander verbunden sind. Liegen nun zwei Punkte A_h und A_k in zwei Blättern, die in einem einfachen Verzweigungspunkte a zusammenhängen, so bilden $A_h a$ und $a A_k$ zusammen eine Linie, die von einem Begrenzungspunkte A_h durch das Innere der Fläche nach einem Begrenzungspunkte A_k führt, also einen Querschnitt. Ist dagegen a ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, in welchem die m Blätter zusammenhängen, die etwa die Punkte $A_1, A_2 \cdots A_m$ enthalten, so ist nun wieder zunächst etwa $A_1 a A_2$ ein Querschnitt, sodann aber bilden die Linien $a A_3, a A_4 \cdots a A_m$ noch $m-2$ andere Querschnitte, sodafs man hier im Ganzen $m-1$ Querschnitte erhält, ebenso viele, als einfache Verzweigungspunkte in a vereinigt sind. Wenn auf diese Art mit allen Verzweigungspunkten verfahren wird, so erhält man genau so viele Querschnitte, als einfache Verzweigungspunkte vorhanden sind, also g. Durch diese g Querschnitte zerfällt nun aber die Fläche in n getrennte Theile, die für sich einfach zusammenhängend sind. Es werden nämlich dadurch gewissermafsen die n Blätter der Fläche von einander getrennt. Denn sind p_h und p_k zwei in irgend zwei Blättern über einander liegende Punkte, so kann man von p_h nach p_k nicht anders gelangen, als wenn Verzweigungsschnitte überschritten und Verzweigungspunkte umwunden werden; letzteres aber wird durch die angebrachten Querschnitte unmöglich gemacht. Je zwei solche Punkte p_h und p_k liegen also stets in getrennten Theilen. Eine Ausnahme davon machen nur die Punkte A selbst. Von irgend einem Punkte A kann man durch Überschreitung eines Verzweigungsschnittes allemal zu einem andern Punkte A gelangen. Es werden also die n Blätter der Fläche in der Art von einander getrennt, dafs in jedem Blatte ein durch zwei in dem Punkte A zusammenstofsende Querschnitte gebildeter Zipfel (oder auch mehrere solcher Zipfel) aus dem Blatte ausgeschieden wird, und dafür ein entsprechender Zipfel eines andern Blattes an dessen

Stelle tritt. Die Fläche besteht demnach jetzt wirklich aus n getrennten Theilen. Jeder dieser Theile ist aber noch für sich zusammenhängend; denn da er im Unendlichen geschlossen ist, so besteht seine Begrenzung lediglich aus den in dem Punkte A zusammenstofsenden Querschnitten. Aus demselben Grunde ist auch jeder Theil für sich einfach zusammenhängend, da man bei jeder in ihm gezogenen geschlossenen Linie nur auf der einen Seite an jene Begrenzung gelangen kann, jede geschlossene Linie also eine vollständige Begrenzung bildet. Die gegebene Fläche wird nun also nach Herausnahme der $n - 1$ Begrenzungspunkte $A_1, A_2 \cdots A_{n-1}$ durch g Querschnitte in n getrennte und für sich einfach zusammenhängende Theile zerlegt. Nun war aber diese Fläche $(q + n)$fach zusammenhängend, es sind also $q + n - 1$ Querschnitte erforderlich, um sie in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Soll diese nun noch in n getrennte Theile zerlegt werden, so sind dazu noch weitere $n - 1$ Querschnitte erforderlich (§ 48, V); mithin geschieht diese Zerlegung durch $q + 2(n-1)$ Querschnitte; dieselbe Zahl war vorhin gleich g, also hat man nach dem Hauptsatze § 49

$$g = q + 2(n-1) \qquad \text{oder} \qquad q = g - 2(n-1).$$

Vergleichen wir hiemit die hiehergehörigen in § 46 gegebenen Beispiele, so ist in dem dritten $n = 2$, $g = 2$; demnach wird $q = 0$, und es bestätigt sich, dafs diese Fläche einfach zusammenhängend ist. In dem fünften Beispiele war $n = 2$, $g = 4$, also ist hier $q = 2$, und die Fläche ist dreifach zusammenhängend.

Aus dem gewonnenen Resultate lassen sich noch einige Folgerungen ziehen. Da nämlich in einer geschlossenen Fläche q stets eine gerade Zahl ist (§ 53, XI), so mufs auch g eine solche sein. Eine im Unendlichen geschlossene Fläche besitzt daher stets eine gerade Anzahl einfacher Verzweigungspunkte. Der einfachste Fall bei einer n-blättrigen Fläche wäre der, dafs zwei Windungspunkte $(n-1)$ter Ordnung vorhanden sind; und wenn dies der Fall ist, so ist die Fläche einfach zusammenhängend.

Eine weitere Folgerung, die sich aus dem Vorigen ergiebt, ist die, dafs eine Fläche, welche dazu dient, die Werthe einer algebraischen Funktion w so zu vertheilen, dafs diese eine eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche wird (§ 12), stets eine endliche Ordnung des Zusammenhanges besitzt, also durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann. Denn die Anzahl n der Blätter ist gleich

der Anzahl der Werthe, welche die Funktion w für jeden Werth der Variablen besitzt, also eine endliche Zahl. Dafs auch die Anzahl g der einfachen Verzweigungspunkte endlich ist, folgt daraus, dafs die Verzweigungspunkte nur unter denjenigen Punkten zu suchen sind, in denen Funktionswerthe entweder zusammenfallen, oder unendlich grofs werden (§ 8). Die Anzahl der letzteren ist nach § 38 eine endliche. Bezeichnet aber $F(w, z) = 0$ die Gleichung $n$ten Grades, durch welche w definirt ist, so sind die Punkte z, in denen Funktionswerthe zusammenfallen, diejenigen, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$F(w, z) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial F(w, z)}{\partial w} = 0$$

genügen, und die letzteren liefern durch Elimination von w eine Gleichung von endlichem Grade für z. Da ferner in jedem dieser Punkte höchstens n Werthe zusammenfallen und daher in jedem Verzweigungspunkte höchstens n Blätter zusammenhängen können, so ist jeder Verzweigungspunkt von endlicher Ordnung. Da hienach n und g endliche Zahlen sind, so ist auch q eine endliche Zahl.

§ 55.

Aus dem Ergebnisse des vorigen Paragraphen läfst sich auch eine Beziehung ableiten, die bei einer nicht geschlossenen, in einer Ebene ausgebreiteten Fläche stattfindet zwischen der Ordnung des Zusammenhanges, der Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte und der Anzahl der Umläufe, welche die Begrenzung der Fläche macht.

Wir gehen von einer im Unendlichen geschlossenen Fläche aus. Diese sei $(q' + 1)$fach zusammenhängend, g' sei die Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspunkte und n die ihrer Blätter. Dann hat man nach dem vorigen Paragraphen

$$q' = g' - 2(n - 1).$$

Wir wollen nun den in der Fläche zu supponirenden Begrenzungspunkt in dem unendlich fernen Punkte eines Blattes liegend annehmen und zunächst voraussetzen, dafs in keinem Blatte der unendlich ferne Punkt ein Verzweigungspunkt sei. Scheidet man dann aus jedem Blatte ein Stück aus, das den unendlich fernen Punkt, aber keinen Verzweigungspunkt enthält und daher von einer einfach in sich zurücklaufenden Curve begrenzt ist, so wächst die Ordnung der Fläche für jede dieser ausgeschiedenen Stellen um Eins, mit Ausnahme derjenigen, welche den supponirten

Begrenzungspunkt enthält (§ 53, IV). Im Ganzen wird daher die Ordnung des Zusammenhanges um $n-1$ erhöht. Ist also die neue Fläche $(q+1)$fach zusammenhängend, so hat man $q=q'+n-1$ und demnach

$$q=g'-n+1.$$

Nachdem nun aber die unendlich fernen Punkte aus der Fläche ausgeschieden sind, kann man die Blätter derselben, welche früher als unendlich grofse Kugelflächen zu betrachten waren, wieder in der Ebene ausgebreitet denken. Jedes Blatt erscheint dann von einer einfach in sich zurücklaufenden Randcurve begrenzt, welche, wenn sie in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wird, einen positiven Umlauf macht. Bedeutet also U die Anzahl der Umläufe der Begrenzung, so ist $U=n$. Die Anzahl g der in der neuen Fläche enthaltenen einfachen Verzweigungspunkte ist der früheren Zahl g' gleich, da der Annahme nach kein Verzweigungspunkt ausgeschieden wurde. Man erhält daher aus der vorigen Gleichung

$$q=g-U+1.$$

Dies ist die oben erwähnte Beziehung, und man kann nun zeigen, dafs diese sich nicht ändert, wenn man mit der Fläche gewisse Änderungen vornimmt.

Betrachten wir zunächst den Fall, dafs in der ursprünglichen Fläche in einem unendlich fernen Punkte m Blätter zusammenhängen, also $m-1$ einfache Verzweigungspunkte in ihm vereinigt sind. Dann beträgt die Anzahl der ausgeschiedenen Flächentheile nicht mehr n wie vorhin, sondern da einer derselben von einer den Verzweigungspunkt m Mal umgebenden Linie begrenzt wird und daher die Stelle von m der früheren einnimmt, nur noch $n-m+1$. Unter diesen bringt derjenige wieder keine Erhöhung der Ordnung des Zusammenhanges hervor, welcher den supponirten Begrenzungspunkt enthielt; die Erhöhung der Ordnung beträgt also $n-m$, oder es ist $q=q'+n-m$, d. i.

$$\begin{aligned} q &= g'-2(n-1)+n-m \\ &= g'-m+1-n+1. \end{aligned}$$

Bei der Ausbreitung der Blätter in die Ebene ist nun die Anzahl der Umläufe U wieder gleich n, denn es ändert sich nur das, dafs die n Randcurven nicht mehr alle von einander getrennt verlaufen, sondern dafs m unter ihnen zu einer einzigen vereinigt sind, die nun aber m Umläufe macht. Dagegen sind jetzt mit den unendlich fernen Punkten zugleich $m-1$ einfache Verzweigungspunkte

aus der Fläche ausgeschieden, also ist jetzt $g = g' - m + 1$. Setzt man dies ein, so erhält man wieder wie oben

$$q = g - U + 1.$$

Die nun in der Ebene ausgebreitete n-blättrige Fläche modificiren wir jetzt dadurch, dafs wir im Innern Stellen ausscheiden. Betrachten wir zuerst eine geschlossene Linie, die einen Flächentheil begrenzt, der keinen Verzweigungspunkt enthält, und denken diesen Flächentheil ausgeschieden. Dann wächst zunächst q um $+1$ (§ 53, IV). Die neue Randcurve aber mufs, wenn ihre Begrenzungsrichtung die positive sein soll, in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden. Versteht man daher jetzt im Allgemeinen unter der Anzahl der positiven Umläufe die positive oder negative Zahl U, welche entsteht, wenn man die Anzahl der Umläufe in der Richtung der abnehmenden Winkel subtrahirt von der Anzahl der Umläufe in der Richtung der wachsenden Winkel, so mufs in dem vorliegenden Falle die Zahl U um -1 vermehrt werden. Gleichzeitig ist q um $+1$ zu vermehren, also bleibt die obige Beziehung ungeändert.

Besteht die Fläche z. B. aus einem Blatte, so ist $g = 0$, wird sie ferner begrenzt von einer äufseren Linie und k kleineren Kreisen, die von der ersteren umschlossen werden, so macht bei positiver Begrenzungsrichtung jene einen Umlauf in der Richtung der wachsenden Winkel, jeder der inneren Kreise einen Umlauf in entgegengesetzter Richtung; folglich ist

$$U = 1 - k$$

und man erhält

$$q = k - 1 + 1 = k,$$

die Anzahl der Querschnitte ist gleich der Anzahl der inneren Kreise.

Wird zweitens ein Flächentheil ausgeschieden, der einen Verzweigungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung enthält, dessen Begrenzungslinie also m Umläufe macht, so wächst wieder q um $+1$ (§ 53, IV), sodann U um $-m$, gleichzeitig aber auch g um $-(m-1)$, also $g - U$ um $+1$; die obige Beziehung bleibt also wieder dieselbe.

Die betrachtete Fläche hat nach den bisher angebrachten Modificationen die Beschaffenheit, dafs die äufseren Randcurven alle im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte umgeben und dafs im Innern Lücken vorkommen, jedoch von der Art, dafs jeder der ausgeschiedenen Flächentheile entweder keinen oder nur einen

Verzweigungspunkt (beliebiger Ordnung) enthielt. Wir haben nun zu untersuchen, ob die obige Beziehung eine andere wird, wenn entweder die äufseren Randcurven nicht mehr alle endlichen Verzweigungspunkte umgeben, oder innere Randcurven die Begrenzungen von ausgeschiedenen Flächentheilen bilden, in denen mehr als ein Verzweigungspunkt enthalten war. Beides kommt darauf hinaus, den Fall zu untersuchen, dafs von der Fläche ein an einem (äufseren oder inneren) Rande liegender Flächentheil abgetrennt wird, der einen Verzweigungspunkt $(m-1)$ter Ordnung enthält, und von dem man unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen kann, dafs sich in ihm keine Lücken befinden, da das Vorkommen derselben schon durch die vorige Betrachtung erledigt ist. Soll nun ein solcher Flächentheil abgelöst werden, so mufs dies, da er am Rande liegt, durch Querschnitte geschehen, und diese müssen der Art gezogen werden, dafs die aus ihnen und den anstofsenden Randtheilen bestehende Begrenzung des abgelösten Stückes eine geschlossene, den Windungspunkt m Mal umgebende Linie bildet. Wenn von diesen Querschnitten keiner den Verzweigungspunkt umwindet, so sind m Querschnitte dazu erforderlich: sonst weniger. Das abgelöste Stück aber ist, da es von einer einzigen wirklich geschlossenen Linie begrenzt wird, einfach zusammenhängend. (§ 46 Beisp. 2.) Wir wollen nun nur den Fall verfolgen, dafs kein Querschnitt den Verzweigungspunkt umwindet; dann wird also durch m Querschnitte ein einfach zusammenhängendes Flächenstück abgelöst. Mithin ist bei der übrig bleibenden Fläche die Ordnung des Zusammenhanges um $m-1$ kleiner geworden. (§ 53 VII.) Gleichzeitig ist wegen des ausgeschiedenen Windungspunktes $(m-1)$ter Ordnung g um $m-1$ zu vermindern. Die Zahl U aber erleidet keine Änderung. Denn da die m Querschnitte keine neuen positiven oder negativen Umläufe hinzufügen, so wird durch das Ausscheiden des Verzweigungspunktes nur eine veränderte Art des Zusammenhängens der Randcurven hervorgebracht, die Umläufe derselben aber bleiben dieselben. Da demnach q und g um $m-1$ vermindert werden, U aber ungeändert bleibt, so bleibt die obige Beziehung bestehen.

Schliefslich betrachten wir noch den Fall, dafs die Begrenzung der Fläche durch nicht zerstückende Querschnitte abgeändert wird. Hierbei lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die Richtungsänderung, welche die Linien erfahren, und bemerken, dafs eine Linie dann einen positiven Umlauf macht, wenn sie im Ganzen eine Richtungsänderung um 2π erfährt. Ist nun in der Fläche

ein nicht zerstückender Querschnitt gezogen, so bildet dieser gleichzeitig zwei Begrenzungsstücke, die bei Einhaltung der positiven Begrenzungsrichtung zwei Mal in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sind. Da wo der Querschnitt in einen Begrenzungstheil der Fläche einmündet, erfährt die Begrenzungsrichtung eine plötzliche Änderung. Sei α der Winkel, um welchen sich die Richtung ändert (Fig. 50). (Es kann allerdings auch der Fall eintreten, dafs der Querschnitt ohne plötzliche Richtungsänderung in den Begrenzungstheil übergeht; dieser Fall ordnet sich aber dem vorigen unter, indem dann $\alpha = 0$ anzunehmen ist.) Beim Durchlaufen der Randcurven, welchen der Querschnitt als ein Theil angehört, kommt man nun aber, da der Querschnitt zwei Mal durchlaufen werden mufs, noch einmal an die vorige Stelle zurück, und zwar wird dann der Querschnitt in entgegengesetzter Richtung, der anstofsende ursprüngliche Begrenzungstheil aber in der nämlichen Richtung wie früher durchlaufen. Daraus folgt, dafs die Begrenzungsrichtung jetzt eine plötzliche Änderung erfährt, die gleich dem Winkel $\pi - \alpha$ ist. Demnach verursacht der Endpunkt des Querschnittes im Ganzen eine Richtungsänderung um π. (Auch dann, wenn dieser in einem Punkte seines früheren Laufes endet, indem dann nur bei der vorigen Betrachtung der Querschnitt selbst an die Stelle der ursprünglichen Begrenzungslinie tritt.) Dasselbe gilt von dem andern Endpunkte des Querschnitts. Demnach bringt der Querschnitt an seinen Endpunkten eine Richtungsänderung gleich 2π hervor. Dagegen fällt die Richtungsänderung, welche der Querschnitt während seines Laufes etwa erfährt, ganz aufser Betracht, da diese bei dem zweiten in entgegengesetztem Sinne erfolgenden Durchlaufen wieder aufgehoben wird. Sonach vermehrt jeder nicht zerstückende Querschnitt die Zahl U der positiven Umläufe um $+ 1$ *);

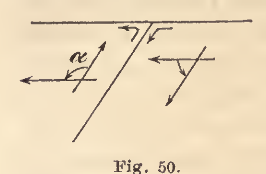


Fig. 50.

*) Ganz dasselbe gilt, wenn ein Querschnitt die Fläche in zwei getrennte Theile theilt. Da nämlich ein Querschnitt, der zwei verschiedene Randcurven verbindet, stets ein nicht zerstückender ist (§ 53 VIII), so kann ein zerstückender nur entweder zwei Punkte derselben Randcurve verbinden, oder von einer Randcurve ausgehend in einem Punkte seines früheren Laufes enden. In beiden Fällen entstehen durch ihn zwei Randcurven aus einer. (§ 53 X. 1. und 3. Siehe auch Fig. 40 und 41 S. 177.) Werden diese, eine nach der andern, in positiver Begrenzungsrichtung umfahren, so wird die ursprüngliche Randcurve einmal, der Querschnitt aber zweimal in entgegengesetzten Richtungen durch-

gleichzeitig wird durch ihn aber die Ordnung des Zusammenhanges um Eins vermindert (§ 53 I), also erfährt q eine Vermehrung um -1; mithin bleibt auch in diesem Falle die obige Beziehung bestehen.

Die Gleichung $q = g - U + 1$ gilt nach dem Vorigen für alle Flächen, die durch die besprochenen Schnitte abgeleitet werden können. Für die Erzeugung mancher Flächenformen, wie z. B. der in der Abhandlung von *Riemann:* Lehrsätze aus der Analysis situs u. s. w. (Crelle's Journ. Bd. 54, S. 110, letztes Beispiel) abgebildeten Fläche, wäre es nun noch nothwendig, auch den Fall zu berücksichtigen, dafs zum Zwecke der Ablösung eines an einem Rande liegenden Flächenstückes, das einen Verzweigungspunkt enthält, Querschnitte gezogen werden, die den Verzweigungspunkt umwinden; und es wurde an einem anderen Orte*) gezeigt, dafs auch dann die obige Relation ihre Geltung nicht verliert. Allein es bleibt immer mifslich, behaupten zu wollen, dafs jede wie immer begrenzte Fläche durch derartige Schnitte erzeugt werden könne, so lange man die Form einer etwa gegebenen Fläche nicht im Voraus kennt. Daher soll lieber ein anderer Beweis für die Allgemeingültigkeit der obigen Relation hinzugefügt werden. Dieser stützt sich auf die Eigenschaft, dafs bei einer in der Ebene ausgebreiteten einfach zusammenhängenden Fläche, welche keine Verzweigungspunkte enthält, die begrenzende Randcurve immer nur einen einzigen Umlauf macht, und dafs dies auch dann gilt, wenn die Fläche erst durch Schnitte in diesen einfachen Zustand versetzt worden ist. Denn erstlich kann bei einer solchen Fläche immer nur eine Randcurve vorhanden sein (§ 53 IX). Stellt man sich diese wie einen beweglichen Faden vor, so kann man zeigen, dass sie stets in einen einmal zu durchlaufenden Kreis umgeformt

---

laufen. Daher behalten die obigen Betrachtungen volle Geltung. Ist also U die Zahl der Umläufe der ursprünglichen Randcurve, und sind U_1 und U_2 diese Zahlen für die beiden Randcurven, die durch den Querschnitt entstanden sind, so hat man

$$U_1 + U_2 = U + 1.$$

Diese Formel verliert, wie ohne Weiteres einleuchtet, ihre Geltung nicht, wenn die beiden durch den Querschnitt entstandenen Randcurven nur einen Punkt miteinander gemein haben, in welchem Falle zwei Theile der ursprünglichen Randcurve in einem Punkte einander unendlich nahe kommen, und der an dieser Stelle gezogene Querschnitt eine unendlich kleine Länge hat.

*) Zur Analysis situs Riemann'scher Flächen (Ber. d. Wien. Akad. Bd. 69. Abth. II. Januar 1874). Siehe hier Fig. 1.

werden kann. Da nämlich die Randcurve sich nirgends durchschneidet, und ihrer Verschiebbarkeit nirgends durch einen Verzweigungspunkt ein Hinderniss in den Weg gelegt wird, so könnte die Umformung in einen Kreis nur dadurch unmöglich gemacht werden, dafs die Curve irgendwo eine Schlinge bildet, die nicht durch Erweiterung aufgelöst werden kann. Allein wenn dies der Fall ist, so müssen die Flächentheile, welche an die Randcurve da, wo diese die Schlinge bildet, anstofsen und dann über einander weggehen, in ihren Fortsetzungen über A und B hinaus (Fig. 51) später mit einander zusammenhängen. Sobald diese Flächentheile über A und B hinaus immer getrennt bleiben, kann die Schlinge durch Erweiterung sofort aufgelöst werden. Hängen aber A und B zusammen, so kann man, wenn von einem Punkte der Schlinge aus ein Querschnitt gezogen wird, von der einen Seite desselben über A und B, da diese zusammenhängen, auf die andere Seite kommen; der Querschnitt zerstückt daher die Fläche nicht, und diese wäre mehrfach zusammenhängend. (§ 48 I.) Bei einer einfach zusammenhängenden Fläche kann demnach jede vorkommende Schlinge stets aufgelöst, und die Randcurve also in einen Kreis umgeformt werden. Wird derselbe in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen, so bildet er einen einzigen positiven Umlauf.

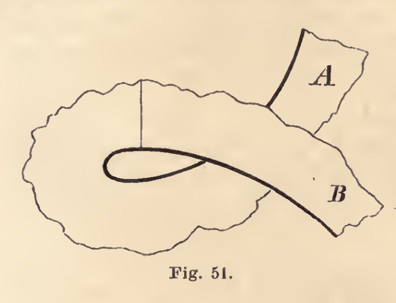


Fig. 51.

Es sei nun eine beliebige, über einen endlichen Theil der Ebene ausgebreitete *Riemann*'sche Fläche gegeben, und für diese mögen q, g, U die frühere Bedeutung haben. Dann ist $g - U + 1$ jedenfalls eine ganze Zahl (oder Null). Die zu beweisende Formel sagt aus, dafs diese Zahl gerade gleich q ist. Wir wollen dies nun nicht voraussetzen, sondern annehmen, es sei

$$g - U + 1 = q + k$$

und dann beweisen, dafs k den Werth Null haben mufs. Zu dem Ende entfernen wir zuerst aus der Fläche sämmtliche Verzweigungspunkte, indem wir jeden mit einer wirklich geschlossenen Linie umgeben und das so begrenzte, den Verzweigungspunkt enthaltende Stück aus der Fläche ausscheiden. Dann bleibt die obige Gleichung bestehen; denn, wie oben S. 211 gezeigt wurde, geht bei Ausscheidung eines Verzweigungspunktes $(m - 1)$ter Ordnung

q in $q+1$, g in $g-m+1$, U in $U-m$, also $g-U$ in $g-U+1$ über. Wenn also nach Ausscheidung sämmtlicher Verzweigungspunkte q in q', und U in U' sich verwandelt hat, so erhält man, da g Null geworden ist,

$$-U'+1=q'+k.$$

Diese Fläche erfordert jetzt q' nicht zerstückende Querschnitte zur Umwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche. Werden diese gezogen, so geht bei jedem q' in $q'-1$ und nach S. 213 gleichzeitig U' in $U'+1$ über. Die vorige Gleichung bleibt mithin bestehen. Ist daher, nachdem die Fläche einfach zusammenhängend, also q' Null geworden ist, U' in U'' übergegangen, so hat man

$$-U''+1=k.$$

Nun aber ist die Fläche nicht blofs einfach zusammenhängend, sondern sie enthält auch gar keine Verzweigungspunkte, also macht ihre Randcurve nur einen einzigen Umlauf, d. h. es ist $U''=+1$ und folglich $k=0$, w. z. b. w.

Für eine einfach zusammenhängende Fläche $(q=0)$ geht die Gleichung $q=g-U+1$ über in

$$U=g+1.$$

Demnach gilt der Satz, den wir für einen speziellen Fall schon § 13 bestätigt fanden: Bei einer einfach zusammenhängenden Fläche ist die Anzahl der Umläufe ihrer Begrenzungscurve um Eins gröfser, als die Anzahl der in ihrem Innern liegenden einfachen Verzweigungspunkte. Doch ist wohl zu beachten, dafs zur Gültigkeit dieser Relation, wie auch der allgemeineren $q=g-U+1$ erforderlich ist, dafs die Fläche in der Ebene ausgebreitet sei.

§ 56.

Wir wollen nun auch solche *Riemann*'sche Flächen betrachten, die nicht in einer Ebene ausgebreitet werden können, die Bedingungen für die Endlichkeit der Ordnung ihres Zusammenhanges aufsuchen und diese Ordnung selbst näher bestimmen. Dabei setzen wir vor allen Dingen voraus, dafs die Fläche nur eine endliche Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten besitze, und nehmen an, dafs keine ihrer Randcurven durch einen Verzweigungspunkt hindurch führe.

Wir gehen von einer Fläche aus, welche ganz geschlossen ist und daher nur einen Randpunkt a besitzt. Wir wollen eine

solche eine volle Fläche nennen und mit W bezeichnen. Von ihr gilt nach § 54 die Beziehung

$$Q = G - 2(n - 1), \tag{1}$$

wenn G die Anzahl der in ihr enthaltenen einfachen Verzweigungspunkte, n die Anzahl ihrer Blätter und Q ihre Querschnittszahl bedeutet. Demnach ist Q eine endliche Zahl, wenn G und n es sind. Die weitere Untersuchung hat daher ihr Augenmerk ausschliefslich auf die Randcurven zu richten.

Wenn in einer vollen Fläche Randcurven angebracht werden sollen, so mufs dies durch Schnitte geschehen, welche in ihr geführt werden. Diese können entweder die volle Fläche nicht zerstücken, oder sie zerstücken sie und scheiden aus ihr einzelne Flächentheile aus. Danach unterscheiden wir zwei Arten von Randcurven.

Unter Randcurven erster Art verstehen wir solche, durch welche aus einer vollen Fläche kein Theil ausgeschieden wird. Sie sind dadurch charakterisirt, dafs in der neuen Fläche T überall zwei Ränder, welche entweder verschiedenen oder einer und derselben Randcurve angehören, in unendlicher Nähe an einander vorbeigehen. Betrachtet man nur die Linien, längs welcher die Schnitte geführt sind, ohne auf die durch diese hervorgebrachten Ränder Rücksicht zu nehmen, so bilden diese Linien ein Liniensystem, und bei jeder Linie gehören die auf beiden Seiten an sie anstofsenden Flächentheile der Fläche T selbst an.

Werden zweitens durch die angebrachten Schnitte aus W Theile ausgeschieden, sodafs in T Lücken entstehen, so kann es bei den dadurch hervorgebrachten Randcurven ebenfalls vorkommen, dafs an einzelnen Stellen die Ränder eine Strecke weit in unendlicher Nähe an einander vorbeigehen. Wir wollen aber diejenigen Randcurven besonders hervorheben, bei denen dies nicht vorkommt, und diese speziell mit dem Namen Randcurven zweiter Art bezeichnen. Demnach wird eine Randcurve zweiter Art von einer geschlossenen Linie gebildet, bei welcher überall auf der einen Seite ein Flächentheil anstöfst, der T angehört, während auf der andern Seite eine Lücke sich befindet. Bei den Randcurven zweiter Art laufen also niemals zwei Ränder eine Strecke weit in unendlicher Nähe an einander vorbei*), vielmehr

*) Der Fall, dafs Ränder, welche Randcurven der zweiten Art angehören, in einzelnen Punkten einander unendlich nahe kommen, wird weiter unten seine Berücksichtigung finden.

entsteht da, wo dies bei zerstückenden Randcurven vorkommt, eine mit einer Randcurve zweiter Art zusammenhängende Randcurve erster Art. Werden die Randcurven zweiter Art in dieser Weise aufgefafst, so gehört jede Randcurve entweder der ersten oder der zweiten Art an, oder sie ist eine Combination aus beiden.

Wir wollen nun zeigen, dafs jede mit beliebigen Randcurven versehene Fläche T aus einer entsprechenden vollen Fläche durch Schnitte erzeugt werden kann. Nehmen wir zunächst an, T enthalte nur Randcurven der zweiten Art. In diesem Falle kann sie durch hinzugefügte Flächenstücke B zuerst zu einer vollen Fläche W ergänzt und dann aus dieser durch Schnitte wieder erzeugt werden. Dies leuchtet für solche Lücken, bei denen die begrenzenden Randcurven alle ganz in einem und demselben Blatte verlaufen, von selbst ein. Wenn dagegen eine Randcurve sich in mehreren Blättern bewegt, so nehme man das zu bildende Ergänzungsstück B als aus den nämlichen Blättern bestehend an, indem man jedes Blatt über den Rand hinaus sich fortgesetzt denkt. Nun mufs an einer Stelle, wo die Randcurve aus einem Blatte in ein anderes übergeht, in T ein Verzweigungsschnitt vorhanden sein oder doch angenommen werden können. An einer solchen Stelle verlängere man den Verzweigungsschnitt in B hinein, lasse ihn in B in einem Verzweigungspunkte endigen und nehme an dieser Stelle in B den Zusammenhang der Blätter genau ebenso an, wie er in T wirklich stattfindet. Dies kann an jeder Stelle, wo es nöthig ist, unabhängig von jeder andern Stelle ausgeführt werden und ist nur dadurch bedingt, wie in T die Blätter bei den Verzweigungsschnitten unter einander zusammenhängen. Wird eine Lücke von mehreren Randcurven begrenzt, so ist bei jeder ebenso zu verfahren. Dadurch erhält man eine überall an die Randcurven anstofsende Fläche B, welche keine Lücken enthält, und welche auch von diesen Randcurven vollständig begrenzt wird, da die letzteren die Lücke vollständig begrenzen.

Liegt nun irgend eine mit beliebigen Randcurven versehene Fläche T vor, so denke man sich alle Randcurven erster Art dadurch beseitigt, dafs man die Linien, längs welchen sie verlaufen, als nicht gezogen betrachtet. Dann ergänze man die Fläche auf die eben angegebene Art zu einer vollen Fläche und schneide aus dieser zuerst die gegebenen Randcurven zweiter Art heraus. Ist dies geschehen, so leuchtet nun von selbst ein, dafs auch die Randcurven erster Art, sei es dafs diese isolirt verlaufen oder mit

denen zweiter Art zusammenhängen, so wie sie vorgeschrieben sind, in die Fläche eingeschnitten werden können.

Man kann demnach eine gegebene Fläche T stets als aus einer vollen Fläche W durch Schnitte entstanden betrachten. Die Anzahl der aus W durch Randcurven zweiter Art ausgeschiedenen Flächentheile B sei s. Alle in W geführten Schnitte verlaufen längs gewisser Linien. Wir wollen uns nun diese Linien auf W verzeichnet denken, dann bilden sie alle zusammen ein Liniensystem. In diesem brauchen nicht alle Linien unter einander zusammen zu hängen. Wir wollen annehmen, dafs es aus r getrennt verlaufenden Systemen $L_1, L_2, \ldots L_r$ bestehe. Jedes L bildet ein vollständig in sich zusammenhängendes Liniensystem, es kann dabei aber sehr wohl mehrere Randcurven enthalten. Den in W zu supponirenden Randpunkt a nehmen wir auf einem der Systeme L liegend an und setzen gleichzeitig voraus, es sei auch auf jedem der übrigen $r - 1$ Systeme ein Randpunkt herausgenommen. Dann verhalten sich alle Systeme in der Beziehung ganz gleich, dafs jedes mit einem Randpunkte in Verbindung steht. Daher brauchen wir nur eines derselben näher zu untersuchen; wir wollen es unbestimmt mit L und den auf ihm liegenden Randpunkt mit a bezeichnen.

Da L ganz in sich zusammenhängt und daher, abgesehen von einer gleich zu erwähnenden Ausnahme, keine einfach geschlossenen Linien enthält, so kann es nach § 50 in einfache Linienstücke zerlegt werden. (Die erwähnte Ausnahme tritt ein, wenn L aus einer einzigen einfach geschlossenen Linie besteht, die also in a beginnt und hier auch endet; dann aber bildet L einen Querschnitt.) Bezeichnet man, wie in § 50, die Anzahlen der in L enthaltenen End- und Knotenpunkte mit $e, k_3, k_4, k_5, \ldots.$, so beträgt die Anzahl der einfachen Linienstücke, aus denen L besteht, nach § 50

$$\tfrac{1}{2}(e + k_3 + 2k_4 + 3k_5 + \cdots),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$k_3 + 2k_4 + 3k_5 + \cdots = K$$

setzt,

$$\tfrac{1}{2}(e + K).$$

Ein einfaches Linienstück ist ein Querschnitt, wenn beide Endpunkte desselben auf einem Rande liegen; liegt aber der eine Endpunkt im Innern der Fläche, so ist das einfache Linienstück ein Einschnitt (§ 53, II). Daher besteht das System L im All-

gemeinen zum Theil aus Querschnitten, zum Theil aus Einschnitten. Allein die letzteren brauchen gar nicht berücksichtigt zu werden; denn ein Einschnitt, wenn er am Rande beginnt und im Innern endet, kann die Fläche niemals zerstücken, er ändert auch die Ordnung des Zusammenhanges nicht (§ 53, II); sein Effect besteht vielmehr nur darin, dafs er eine schon vorhandene Randcurve erweitert. Daher kommt es uns darauf an, die Anzahl p der in L enthaltenen Querschnitte zu bestimmen. Dazu bemerke man, dafs das Liniensystem L in der That nach dem Satze von *Lippich* als ein Querschnittsystem betrachtet werden kann, aber nur dann, wenn die Bedingungen I und II des § 51 erfüllt sind. Dies ist nun nicht der Fall, wenn Endpunkte von L im Innern der Fläche liegen. Man kann aber diese dadurch beseitigen, dafs man jedes Linienstück, das einen solchen Endpunkt trägt, an dem zunächst liegenden Knotenpunkte abtrennt. Dann besteht das übrig bleibende System, da es nun den Bedingungen I und II genügt, aus lauter Querschnitten von bestimmter Anzahl p; die abgetrennten Linienstücke aber sind Einschnitte. Wir wollen nun den auf L befindlichen Randpunkt a, der ja beliebig angenommen werden kann, stets entweder auf einen Endpunkt oder auf einen gewöhnlichen Punkt legen. Ist a ein Endpunkt, so sind nur $e-1$ Linienstücke abzutrennen, da a als Randpunkt nicht beseitigt zu werden braucht. Man hat also, um p zu finden, von der Anzahl $\frac{1}{2}(e+K)$ aller einfachen Linienstücke die $e-1$, welche keine Querschnitte sind, in Abzug zu bringen, und erhält dadurch

$$p = \tfrac{1}{2}(e+K) - (e-1) = \tfrac{1}{2}(K-e) + 1.$$

Zu demselben Werthe gelangt man, wenn a ein gewöhnlicher Punkt ist. Dann müssen alle e Endpunkte beseitigt werden; aber um das übrig bleibende System in Querschnitte zu zerlegen, mufs man nach den Erörterungen des § 51, da alle in a einmündenden Linienstücke hier als mit Endpunkten versehen betrachtet werden müssen, a als zwei Endpunkte hinzu rechnen. Die Gesammtzahl der einfachen Linienstücke ist daher jetzt

$$\tfrac{1}{2}(2+e+K)$$

und man erhält

$$p = \tfrac{1}{2}(2+e+K) - e = \tfrac{1}{2}(K-e) + 1,$$

wie vorhin; und diesem Werthe ordnet sich auch der oben erwähnte Ausnahmefall unter.

Demnach enthält jedes der r Liniensysteme L

$$\tfrac{1}{2}(K-e) + 1$$

Querschnitte. Alle zusammen enthalten also deren

$$\tfrac{1}{2}(\Sigma K - \Sigma e) + r;$$

und wenn man jetzt die Bezeichnungen $e, k_3, k_4, k_5, \ldots$ und K auf die End- und Knotenpunkte bezieht, die in dem ganzen von allen Randcurven gebildeten Liniensysteme enthalten sind, d. h., wenn man e und K statt Σe und ΣK schreibt, so ist die Anzahl p der Querschnitte, welche von allen Randcurven gebildet werden,

$$p = \tfrac{1}{2}(K - e) + r. \tag{2}$$

Diese Querschnitte sind nun zum Theil zerstückende, zum Theil nicht zerstückende. Der Annahme nach waren s Flächentheile B aus W ausgeschieden; mit Hinzurechnung der übrig bleibenden Fläche T ist also W in $s + 1$ Theile zerlegt. Daher ist s auch die Anzahl der zerstückenden Querschnitte, weil kein Querschnitt eine Fläche in mehr als zwei Theile zerlegen kann, und keiner einen andern überschreiten darf. (Vgl. § 48, V.) Bezeichnet man aufserdem mit ν die Anzahl der nicht zerstückenden Querschnitte, so hat man

$$\nu + s = \tfrac{1}{2}(K - e) + r. \tag{3}$$

Nun war für W nach (1)

$$Q = G - 2(n - 1); \tag{4}$$

es waren aber $r - 1$ Randpunkte aus W herausgenommen, also ist Q um $r - 1$ zu vermehren, und diese $(Q + r)$fach zusammenhängende Fläche ist nun durch $\nu + s$ Querschnitte in $s + 1$ Theile getheilt worden. Demnach kann der § 53, VI bewiesene Satz zur Anwendung gebracht werden. Bezeichnet man nämlich die Querschnittszahlen für T mit q, und für die s ausgeschiedenen Flächentheile B mit $q_1', q_2', \ldots . q_s'$, so ist nach diesem Satze

$$Q + r - 1 = \nu + q + \Sigma q_h'. \tag{5}$$

Mit Zuziehung von (3) erhält man hieraus

$$q = Q - 1 - \tfrac{1}{2}(K - e) - \Sigma q_h' + s.$$

Aus dieser Formel kann man schon ersehen, wann q eine endliche Zahl ist. Da nämlich Q und nach § 53, VI auch jedes q_h' endlich ist, so bleibt q endlich, wenn s, K, e endliche Zahlen sind, d. h. wenn die Randcurven ein endliches Liniensystem (im Sinne des § 50) bilden.

Wenn nun T nur Randcurven der ersten Art besitzt, so kann man ihre Querschnittszahl q ganz allgemein angeben. In diesem

Falle sind nämlich die in den Randcurven enthaltenen Querschnitte sämmtlich nicht zerstückende, daher ist Q zuerst um $r-1$ zu vermehren und dann um die Anzahl p der Querschnitte, welche in den Randcurven enthalten sind, zu vermindern. Die Einschnitte aber, die übrigens nur als Randcurven erster Art oder als Theile von solchen vorkommen können, ändern die Ordnung der Fläche nicht. Man hat also

$$q = Q + r - 1 - p,$$

oder wegen (4)

$$q = G - 2n + 1 + r - p,$$

und schliefslich wegen (2), wenn zugleich die Anzahl der in T enthaltenen einfachen Verzweigungspunkte, die in diesem Falle gleich G ist, wieder mit g bezeichnet wird,

$$q = g - 2n + 1 - \tfrac{1}{2}(K - e). \tag{6}$$

Wenn aber T auch Randcurven zweiter Art besitzt, so wollen wir, um einen bestimmten Ausdruck für q zu erhalten, eine beschränkende Voraussetzung machen, nämlich annehmen, dafs alle ausgeschiedenen Flächenstücke B in Ebenen ausgebreitet werden können*). Dann kann für diese die Beziehung $q = g - U + 1$ des § 55 in Anwendung gebracht werden. Bezeichnet man nämlich die Anzahlen der in den Flächentheilen B enthaltenen einfachen Verzweigungspunkte mit g_1', g_2', $\cdots g_s'$, so ist jetzt

$$G = g + \Sigma g_h'. \tag{7}$$

Ist ferner U_h die Anzahl der Umläufe der Randcurven in einem der Theile B, so ist für diesen

$$q_h' = g_h' - U_h + 1.$$

Für alle s Flächentheile B erhält man also, wenn

$$\Sigma U_h = V$$

gesetzt wird,

$$\Sigma q_h' = \Sigma g_h' - V + s.$$

Subtrahirt man nun diese Gleichung von (4), so erhält man mit Rücksicht auf (7)

---

*) Wenn eine volle Fläche, etwa eine *Riemann*'sche mehrblättrige Kugelfläche, durch irgend welche Schnitte in zwei getrennte Theile zerfällt, so ist leicht zu übersehen, dafs es vorkommen kann, dafs entweder beide Theile oder nur einer von beiden eben ausgebreitet werden können; aber es ist sehr wahrscheinlich, dafs auch der dritte Fall eintreten kann, dafs nämlich keiner von beiden diese Eigenschaft hat. Für solche Fälle würde die folgende Untersuchung ihre Geltung verlieren.

$$Q - \Sigma q_h' = g - 2n + 2 + V - s,$$

und da aus (5)

$$Q - \Sigma q_h' = q + v - r + 1$$

folgt,

$$q + v - r + 1 = g - 2n + 2 + V - s$$

oder

$$q = g - 2n + 1 - (v + s - r) + V,$$

und schliefslich aus (3)

$$q = g - 2n + 1 - \tfrac{1}{2}(K - e) + V. \tag{8}$$

Wenn keine Randcurven zweiter Art vorhanden sind, also $V = 0$ ist, führt diese Formel auf (6) zurück.

Die Umläufe V der Randcurven zweiter Art sind nach dem Obigen in den ausgeschiedenen Flächentheilen B zu zählen, und zwar so, wie es § 55 angegeben wurde, nämlich: Jede Randcurve ist so zu umfahren, dafs der ausgeschiedene Theil B zur Linken liegt, und nachdem B in einer Ebene ausgebreitet ist, hat man jeden Umlauf als einen positiven oder einen negativen zu rechnen, je nachdem er in der Richtung der wachsenden oder der abnehmenden Winkel auszuführen ist.

Auf einen besonderen Umstand ist noch aufmerksam zu machen. Es kann bei den Randcurven zweiter Art vorkommen, dafs Randtheile, welche entweder verschiedenen Randcurven oder einer und derselben angehören, einander in einzelnen Punkten S treffen. In solchen Fällen sind verschiedene Auffassungen möglich, sowohl in Bezug darauf, wie eine Randcurve über einen Punkt S hinüber fortgesetzt werden soll, als auch in Beziehung auf den Zusammenhang der in einem Punkte S zusammenstofsenden Flächentheile. Nun bleibt zwar die Formel (8) immer richtig, wenn man nur eine einmal gewählte Auffassung consequent fest hält, aber um allen Schwierigkeiten, die sich dabei einstellen können, aus dem Wege zu gehen, und um etwas Bestimmtes zu haben, wollen wir festsetzen: Wenn zwei Randtheile, welche Randcurven zweiter Art angehören, in einem Punkte S sich treffen, so soll angenommen werden, dafs sie hier durch einen unendlich kleinen Querschnitt, d. i. durch eine unendlich kleine Randcurve erster Art, mit einander verbunden sind. Man hat dadurch den Vortheil, dafs jede Randcurve zweiter Art ohne Ausnahme, wenn sie für sich, d. h. abgesehen von etwa in sie einmündenden Randcurven erster Art, betrachtet wird, eine einfach geschlossene Linie bildet.

Die Formel (6) gilt für Flächen, die nur Randcurven der

ersten Art enthalten, ganz allgemein. Die Formel (8) dagegen, für Flächen, welche beide Arten von Randcurven oder nur solche der zweiten Art besitzen, gilt nur unter der Voraussetzung, dafs die ausgeschiedenen Flächentheile in Ebenen ausgebreitet werden können. Ist aber diese Voraussetzung erfüllt, so bleibt (8) gültig, gleichviel ob T selbst in einer Ebene ausbreitbar ist oder nicht. Wir wollen einen Fall hervorheben, in welchem das Erstere statt hat, und in welchem dann die Formel (8) wieder auf die einfachere $q = g - U + 1$ zurückgeführt werden kann. Stellt man sich nämlich die volle Fläche W als im Unendlichen geschlossen vor, und tritt der Fall ein, dafs in T alle n unendlich fernen Punkte durch Randcurven zweiter Art, welche n Umläufe machen, ausgeschlossen worden sind, so kann T in einer Ebene ausgebreitet werden*). Geschieht dies, so machen die äufseren Randcurven n Umläufe, und die übrigen $V - n$ Umläufe rühren von inneren Randcurven her. Die letzteren werden der Annahme nach so umfahren, dafs die ausgeschiedenen Theile B zur Linken liegen, T also zur Rechten sich befindet. Kehrt man aber, um die gewöhnliche Annahme, dafs T zur Linken liegt, wieder herzustellen, die Umlaufsrichtung um, so ändert gleichzeitig jeder Umlauf sein Vorzeichen, mithin ist dann

$$-(V - n) = n - V$$

die Anzahl der positiven Umläufe bei den inneren Randcurven. Anders aber ist es bei den äufseren. Denn ein positiver Umlauf (in der Richtung der wachsenden Winkel) in einem ausgeschiedenen Stücke, das einen unendlich fernen Punkt enthält, bildet, wenn T in einer Ebene ausgebreitet ist, in T einen negativen Umlauf; kehrt man also wieder die Umlaufsrichtung um, so bleibt er ein positiver Umlauf. Die äufseren Randcurven machen also n positive Umläufe, die inneren $n - V$, mithin ist der Beitrag, den die Randcurven zweiter Art zu der Zahl U liefern, gleich

$$2n - V. \tag{9}$$

Dieser Werth wird bei den Randcurven erster Art nach S. 213 durch jeden Querschnitt um $+1$ vermehrt, während jeder Einschnitt ihn ungeändert läfst, denn bei einem Einschnitte tritt an dem einen Endpunkte eine Richtungsänderung gleich $+\pi$, an

*) Das ist vielleicht der einzige Fall, in welchem sowohl T selbst, als auch die ausgeschiedenen Theile in Ebenen ausbreitbar sind; es mag aber dahin gestellt bleiben, ob dasselbe nicht auch noch in andern Fällen statthaben kann.

dem andern eine gleich $-\pi$ ein. Um nun die Anzahl der Querschnitte zu bestimmen, welche in den Randcurven erster Art allein enthalten sind, wollen wir diese in zwei Theile theilen: der erste Theil enthalte diejenigen, welche mit Randcurven zweiter Art zusammenhängen, der zweite Theil alle übrigen. Die auf diese beiden Theile sich beziehenden Werthe der Zahlen e und K mögen bezüglich mit e_1 und K_1, und mit e_2 und K_2 bezeichnet werden, sodaſs

$$e_1 + e_2 = e, \qquad K_1 + K_2 = K \tag{10}$$

ist. Was den ersten Theil anbetrifft, so erinnere man sich, daſs wenn bei einem Liniensysteme die § 50 erörterte Abtrennung vorgenommen wird, die Anzahl der entstehenden einfachen Linienstücke immer dieselbe, nämlich

$$\tfrac{1}{2}(e_1 + K_1)$$

ist, auch dann, wenn die Abtrennung so ausgeführt wird, daſs dabei einfach geschlossene Linien entstehen. Daher kann man in dem vorliegenden Liniensysteme die Abtrennung so einrichten, daſs alle in ihm enthaltenen Randcurven zweiter Art als einfach geschlossene Linien herausfallen. Dann bilden die übrig bleibenden Randcurven erster Art $\frac{1}{2}(e_1 + K_1)$ einfache Linienstücke, und von diesen sind, weil alle e_1 Endpunkte im Innern liegen,

$$\tfrac{1}{2}(e_1 + K_1) - e_1 = \tfrac{1}{2}(K_1 - e_1)$$

nicht zerstückende Querschnitte.

Der zweite Theil der Randcurven erster Art, also diejenigen, die nicht mit Randcurven zweiter Art zusammenhängen, mögen ϱ getrennt verlaufende Systeme bilden. Wird auf jedem der letzteren ein Randpunkt angenommen, so bilden sie nach (2)

$$\tfrac{1}{2}(K_2 - e_2) + \varrho$$

nicht zerstückende Querschnitte. Da aber jeder Randpunkt einen negativen Umlauf repräsentirt, so liefern sie

$$-\varrho + [\tfrac{1}{2}(K_2 - e_2) + \varrho] = \tfrac{1}{2}(K_2 - e_2)$$

positive Umläufe. Demnach ist die unter (9) gefundene Zahl $2n - V$ für den ersten Theil der Randcurven erster Art um $\frac{1}{2}(K_1 - e_1)$, für den zweiten um $\frac{1}{2}(K_2 - e_2)$ zu vermehren. Mit Rücksicht auf (10) erhält man also für die Anzahl U der positiven Umläufe, welche sämmtliche Randcurven machen, den Werth

$$U = 2n - V + \tfrac{1}{2}(K - e),$$

wodurch (8) in der That in $q = g - U + 1$ übergeht.

Nach den Ergebnissen dieses Paragraphen können wir nun den Satz aussprechen: Jede *Riemann*'sche Fläche, welche nur eine endliche Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten besitzt, und deren Randcurven ein endliches Liniensystem (im Sinne des § 50) bilden, kann durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden.

§ 57.

Wir wollen zum Schlusse von den Betrachtungen dieses Abschnittes noch eine Anwendung machen, und zwar auf die Ermittelung der Beziehung, welche zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines beliebigen von ebenen Flächen begrenzten Körpers besteht*).

Bezeichnet man diese Zahlen der Reihe nach mit e, k und f, so ist nach einem Satze von *Euler*

$$e - k + f = 2. \tag{1}$$

Allein diese Relation gilt nicht von jedem beliebig gestalteten Körper mit ebenen Flächen; im Allgemeinen mufs vielmehr auf der rechten Seite noch eine Zahl hinzugefügt werden, welche von der Ordnung des Zusammenhanges sowohl der Gesammtoberfläche, als auch der einzelnen Seitenflächen abhängt. Die *Euler*'sche Relation gilt z. B. nicht bei dem in Fig. 52 dargestellten Körper, bei welchem ein kleineres Parallelepid auf einem gröfseren so aufsitzt, dafs eine Fläche des kleineren einen im Innern einer Fläche des gröfseren liegenden Theil bedeckt, wie man sich durch Abzählung sofort überzeugt. Denn es ist hier $e = 16$, $k = 24$, $f = 11$, also $e - k + f = 16 - 24 + 11 = 3$ und nicht $= 2$, wie die *Euler*'sche Relation verlangt. Ebenso gilt diese auch nicht immer, wenn ein Körper eine Höhlung hat, oder sich nach Art eines Ringes zusammenschliefst.

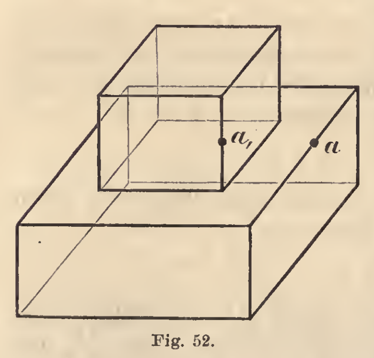


Fig. 52.

*) *F. Lippich*, Zur Theorie der Polyeder (Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. Bd. 84. Abth. II. Juni-Heft 1881).

Wir wollen nun annehmen, dafs die Gesammtoberfläche des Körpers $(q + 1)$fach zusammenhängend sei, dafs also q Querschnitte sie in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Da diese Fläche geschlossen ist, so müssen wir auf ihr nach § 46 einen Randpunkt annehmen. Dieser sei mit a bezeichnet und möge auf einer Kante liegen (Fig. 52). Nun bilden die Kanten auf der Oberfläche des Körpers ein Liniensystem. Dieses kann entweder vollständig zusammenhängen oder aber aus getrennten Theilen bestehen. Die Anzahl solcher Theile sei n, wo n also auch gleich Eins sein kann. Dieses Liniensystem würde nun nach § 51 als ein System von Querschnitten betrachtet werden können, wenn es die dort angegebenen Bedingungen I und II erfüllte. Das ist mit der Bedingung I zwar der Fall, da die Linien keinen im Innern einer Fläche liegenden Endpunkt besitzen, nicht aber mit II, da, falls n nicht gerade gleich Eins ist, die Linien nicht alle mit dem Randpunkte a zusammenhängen. Man kann jedoch die Erfüllung dieser Bedingung herbeiführen, wenn man ebenso, wie auf einem der Theile des Kantensystems der Randpunkt a angenommen war, auch auf jedem der übrigen $n - 1$ Theile auf einer Kante eines jeden noch je einen Randpunkt annimmt. Diese Punkte seien mit $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ bezeichnet. (In Fig. 52 braucht nur ein solcher Punkt a_1 angenommen zu werden.) Dann besitzt die Fläche n Randpunkte, und jede Linie steht jetzt mit irgend einem Rande in Zusammenhang; die Bedingung II ist also erfüllt. Demnach bildet jetzt das aus den Kanten bestehende Liniensystem nach § 51 ein System von Querschnitten von einer ganz bestimmten Anzahl, welche s sei.

Nachdem nun aber aus der Fläche $n - 1$ neue Randpunkte herausgenommen sind, ist die Ordnung ihres Zusammenhanges um $n - 1$ gewachsen. Sie erfordert also nun $q + n - 1$ Querschnitte zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende. Denkt man sich die Fläche längs den Kanten, welche s Querschnitte bilden, durchgeschnitten, so zerfällt sie in getrennte Theile, nämlich in die einzelnen den Körper begrenzenden Flächen, deren Anzahl f war. Diese sind im Allgemeinen nicht alle einfach zusammenhängend. (In Fig. 52 ist es eine nicht, nämlich diejenige, auf welcher das kleinere Parallelepiped aufsitzt.) Bezeichnet man mit p die Gesammtanzahl der Querschnitte, die nöthig sind, um alle Begrenzungsflächen einfach zusammenhängend zu machen, so erhält man, wenn diese Querschnitte noch hinzugefügt werden, weil keiner von ihnen eine Fläche zerstückt, wiederum f ge-

trennte Theile, die nun aber alle einfach zusammenhängend sind. Demnach hat man: Die nach Herausnahme der $n-1$ Randpunkte $(q+n)$fach zusammenhängende Gesammtoberfläche des Körpers zerfällt durch $s+p$ Querschnitte in f getrennte Theile, von denen jeder für sich einfach zusammenhängend ist.

Nun kann man aber andrerseits dieselbe Fläche zuerst durch $q+n-1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln und dann diese durch $f-1$ hinzugefügte Querschnitte in f getrennte Theile zerschneiden. Die vorige Fläche zerfällt also auch durch

$$(q+n-1)+(f-1)$$

Querschnitte in f getrennte und für sich einfach zusammenhängende Theile. Nach dem *Riemann*'schen Hauptsatze ist demnach

$$(q+n-1)+(f-1)=s+p$$

oder

$$n-s+f=2+p-q. \tag{2}$$

In dieser Formel kann jetzt die darin vorkommende Zahl $n-s$ durch die Zahlen e und k der Ecken und Kanten ausgedrückt werden. In jeder Ecke stofsen nämlich mindestens drei Kanten zusammen, daher bildet jede Ecke einen Knotenpunkt des aus den Kanten bestehenden Liniensystems, und bezeichnet man mit $e_3, e_4, e_5, \ldots.$ die Anzahlen der 3-, 4-, 5- .... kantigen Ecken, so ist

$$e=e_3+e_4+e_5+\cdots$$

Zählt man ferner alle in den einzelnen Ecken zusammenstofsenden Kanten zusammen, so erhält man, da dabei jede Kante zwei Mal gerechnet wird, die doppelte Anzahl aller Kanten. Daher ist

$$2k=3e_3+4e_4+5e_5+\cdots$$

Will man nun das Kantensystem in die s Querschnitte, aus denen es besteht, zerlegen, so hat man die in § 50 erörterte Abtrennung vorzunehmen, bei welcher dann die s Querschnitte als s einfache Linienstücke erscheinen, deren Anzahl halb so grofs ist, als die Anzahl ihrer Endpunkte. Dabei mufs nach § 51 jeder der n Punkte $a, a_1, a_2, \ldots. a_{n-1}$ als zwei Endpunkte bildend angesehen werden, und da aufserdem jede h-kantige Ecke als h-facher Knotenpunkt $h-2$ Endpunkte liefert, so erhält man

$$2s=2n+e_3+2e_4+3e_5+\cdots$$

Wird hievon der vorige Ausdruck für $2k$ subtrahirt, so ergiebt sich

$$2s - 2k = 2n - 2(e_3 + e_4 + e_5 + \cdots)$$
$$= 2n - 2e,$$

mithin ist

$$n - s = e - k$$

und damit erhält man aus (2)

$$e - k + f = 2 + p - q. \tag{3}$$

Dies ist die gesuchte Beziehung. Im allgemeinen Falle kommt also auf der rechten Seite der *Euler*'schen Relation (1) zu der Zahl 2 noch die Zahl $p - q$ hinzu, bei welcher q angiebt, wie viel Querschnitte bei der Gesammtoberfläche, und p, wie viele bei allen einzelnen Begrenzungsflächen erforderlich sind, um aus ihnen einfach zusammenhängende Flächen herzustellen.

Die *Euler*'sche Relation gilt also nur dann, wenn $p = q$ ist; bei einem gewöhnlichen überall convexen Polyeder ist das in der That der Fall, denn da ist $p = q = 0$. In Betreff einiger speziellen Fälle und der Art, wie in diesen die Zahlen e, k, f gezählt werden müssen, damit die Gleichung (3) Geltung behalte, verweisen wir auf die oben citirte Abhandlung.

Zehnter Abschnitt.

Von den Periodicitätsmoduln*).

§ 58.

Es bedeute $f(z)$ eine beliebige algebraische Funktion. Denken wir uns als das Gebiet der Veränderlichen z eine aus so vielen Blättern bestehende und mit solchen Verzweigungspunkten behaftete Fläche, wie es die Natur dieser Funktion $f(z)$ erheischt. Die Unstetigkeitspunkte derselben umgeben wir mit kleinen geschlossenen Linien und schliefsen sie dadurch aus. Vorläufig wollen wir annehmen, dafs dies mit allen Unstetigkeitspunkten geschehen sei, wir werden aber sehr bald sehen, dafs gewisse Arten von Unstetigkeitspunkten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Die so entstehende Fläche nennen wir die Fläche T. Diese besitzt nun eine endliche Ordnung des Zusammenhanges und kann also, wenn

*) Zur Erläuterung der in diesem Abschnitte enthaltenen allgemeinen Betrachtungen kann die in § 22 und 23 angestellte spezielle Untersuchung des Logarithmus und der Exponentialfunktion dienen. Weitere Beispiele finden sich in § 61.

sie mehrfach zusammenhängend ist, durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Denn dies ist, da die zu Grunde liegende Funktion eine algebraische ist, nach § 54 jedenfalls vor Ausschliefsung der Unstetigkeitspunkte der Fall. Da aber eine algebraische Funktion nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten besitzt (§ 38), so kommt durch die Ausschliefsung derselben nur eine endliche Anzahl von Randcurven neu hinzu, mithin bleibt nach § 56 die Ordnung des Zusammenhanges auch nach der Ausschliefsung der Unstetigkeitspunkte endlich. Ist demgemäfs die Fläche T mehrfach zusammenhängend, so verwandeln wir sie durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende, welche mit T' bezeichnet werden möge. Alsdann bildet innerhalb T' jede geschlossene Linie die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. Bildet man daher die Integralfunktion

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

indem man von einem beliebigen festen Anfangspunkte z_0 aus längs eines beliebigen, ganz innerhalb T' liegenden Weges bis zu einem Punkte z integrirt, so machen irgend zwei solche Wege vereinigt eine geschlossene Linie aus, die einen Flächentheil vollständig begrenzt, in welchem $f(z)$ überall stetig ist, und folglich erlangt w auf allen solchen Wegen in z denselben Werth (§ 18). Demnach ist w einé Funktion der oberen Grenze z, die innerhalb T' überall eindeutig bleibt*).

*) Das Obige erleidet keine Ausnahme, wenn zwei Wege zusammengenommen eine geschlossene Linie bilden, welche sich selbst durchschneidet. Denn man kann eine solche immer in mehrere einfach geschlossene Linien zerlegen. (Vgl. Fig. 53.) Dies geschieht dadurch, dafs man jedesmal, wenn man, von einem beliebigen Punkte z_0 aus die Linie durchlaufend, an einen schon einmal überschrittenen Punkt (z. B. a) zurückgelangt und also eine einfach geschlossene Linie (z. B. $abcda$) durchlaufen hat, diese ausscheidet und den folgenden Weg (z. B. ae) als die Fortsetzung des dem ausgeschiedenen Theile vorhergehenden Stückes ($z_0 a$) betrachtet. Wiederholt man dies, so oft es vorkommt, so

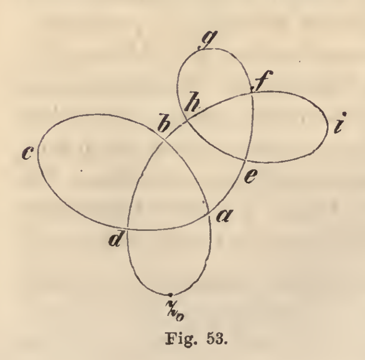


Fig. 53.

Anders aber verhält es sich, wenn wir die Funktion w in der Fläche T betrachten, also den Integrationsweg auch die Querschnitte überschreiten lassen. Um dies zu untersuchen, wollen wir zuerst den Fall ins Auge fassen, dafs kein Querschnitt durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Nun gehört jeder Querschnitt mit zur Begrenzung von T', und zwar beide Seiten desselben, sodafs diese zusammenhängen und man eine geschlossene, ganz im Innern von T' verlaufende Linie b ziehen kann, welche von der einen Seite des Querschnittes auf die andere Seite desselben führt. Sind dann z_1 und z_2 (Fig. 54) zwei zu beiden Seiten eines Querschnittes einander unendlich nahe liegende Punkte, so fragt es sich, ob

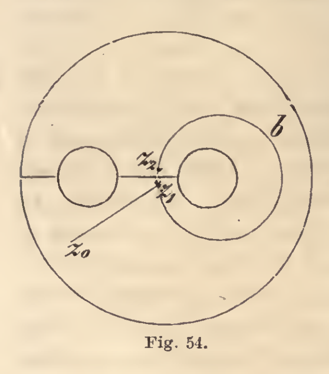


Fig. 54.

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

wenn man die Integrationswege immer noch ganz in T' verlaufen läfst, in z_1 und z_2 gleiche (eigentlich um eine unendlich kleine Gröfse verschiedene) oder verschiedene Werthe annimmt. Bezeichnet man aber die Werthe von w in z_1 und z_2, resp. durch w_1 und w_2, so ist

$$w_2 = \int_{z_0}^{z_2} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz,$$

das erste Integral auf einem beliebigen in T' verlaufenden Wege, das zweite auf einer geschlossenen Curve b genommen, die innerhalb T' von z_1 nach z_2 führt. Es ist also

$$w_2 - w_1 = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz.$$

---

bleibt als Rest zuletzt eine ebenfalls einfach geschlossene Linie übrig, und die gegebene Linie wird auf diese Art in mehrere einfach geschlossene Linien zerlegt. (In der Figur sind die auszuscheidenden Linien $abcda$ und $efghe$ und die übrigbleibende $z_0 aeifhbdz_0$). Das obige Integral ist nun, auf jede der einfach geschlossenen Linien erstreckt, gleich Null, und also auch in Bezug auf die gegebene Linie, da dieses Integral die Summe der vorhergehenden ist. Ist dann die gegebene Linie aus zwei von z_0 nach z führenden Wegen entstanden, so hat das Integral auf beiden denselben Werth (§ 18).

Daher haben w_1 und w_2 gleiche oder verschiedene Werthe, je nachdem das auf die geschlossene Linie b ausgedehnte Integral

$$\int f(z)\,dz$$

Null ist, oder einen von Null verschiedenen Werth A hat. Im ersteren Falle bleibt w beim Überschreiten des Querschnittes stetig, im letzteren Falle dagegen springt w plötzlich von w_1 zu $w_2 = w_1 + A$ über und ist daher unstetig. Allein dieser Sprung ist an allen Stellen des nämlichen Querschnittes der gleiche, da der Integralwerth sich nicht ändert, wenn man die geschlossene Linie b so erweitert oder verengert, dafs sie an zwei anderen einander unendlich nahe liegenden Punkten z_1 und z_2 zu beiden Seiten des nämlichen Querschnittes anfängt und endigt (§ 19). Diese Gröfse A, welche also längs des ganzen Querschnittes constant ist, und um welche die Funktionswerthe auf der einen Seite des Querschnittes gröfser sind, als auf der anderen, nennt man den Periodicitätsmodul, welcher diesem Querschnitt angehört. Ganz dasselbe findet nun bei jedem Querschnitte statt, da die beiden Seiten eines jeden zusammenhängen, und also eine geschlossene Linie von einem Punkte der einen Seite zu einem unendlich nahen auf der anderen Seite durch das Innere von T' gezogen werden kann. Jedem Querschnitt gehört also ein Periodicitätsmodul an, der für einen und denselben Querschnitt constant bleibt (immer noch unter der Voraussetzung, dafs kein Querschnitt durch einen späteren in Abschnitte getheilt wird). Denkt man sich nun aber die Funktion w auch in T, also auch über einen Querschnitt hinüber, stetig fortgesetzt, so erlangt sie auf dem den Querschnitt überschreitenden Wege $z_0 z_1 b z_2 z_1$ in z_1 einen Werth, der um den Periodicitätsmodul A gröfser ist, als der Werth, den sie auf dem Wege $z_0 z_1$ erreicht, welcher den Querschnitt nicht überschreitet. Denn im ersteren Falle ist der Werth von w in z_1 als die stetige Fortsetzung von w_2 zu betrachten, während auf dem zweiten Wege w den Werth w_1 erlangt, und

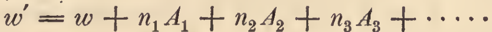
$$w_2 = w_1 + A$$

war. Es findet hier ein ähnlicher Vorgang statt, wie der, den wir früher bei den Verzweigungsschnitten kennen gelernt haben (vgl. § 13), und so lange die Fläche T nur aus einem einzigen Blatte besteht, kann man auch wirklich jeden Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt ansehen, über den hinüber die Fläche sich in ein anderes Blatt fortsetzt; nur müfste man sich dann unendlich viele Blätter unter einander liegend denken, da bei jedem neuen Über-

schreiten des Querschnittes der Funktionswerth w aufs Neue um A zunimmt, und der ursprüngliche Werth niemals wieder eintritt. Wenn die Fläche T selbst schon aus mehreren Blättern besteht, würde jene Vorstellungsart zwar möglich sein, aber doch zu complicirt werden und daher keinen rechten Nutzen gewähren.

Das Zeichen von A ändert sich, wenn die geschlossene Curve b in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird; wir wollen aber den Periodicitätsmodul stets so annehmen, dafs er gleich ist dem Integrale längs der geschlossenen Curve b, wenn diese in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wird.

Denkt man sich jetzt alle möglichen Wege, welche von einem festen Anfangspunkte z_0 nach einem beliebigen Punkte z innerhalb der Fläche T führen, so können diese Wege entweder keinen Querschnitt überschreiten, oder aber einen oder mehrere Querschnitte ein oder mehrere Male durchschneiden. Je nach der Beschaffenheit dieser Wege kann daher w in einem und demselben Punkte z sehr verschiedene Werthe erhalten, und ist also eine vieldeutige Funktion der oberen Grenze des Integrals. Allein da diese Verschiedenheit der Werthe von w in z nur durch die Überschreitungen der Querschnitte bewirkt wird, so können sich diese verschiedenen Werthe nur um Vielfache der Periodicitätsmoduln von einander unterscheiden. Bezeichnen daher A_1, A_2, A_3, etc. die Periodicitätsmoduln der einzelnen Querschnitte, n_1, n_2, n_3, etc. positive oder negative ganze Zahlen, und w und w' zwei verschiedene Werthe von w in z, so mufs



$$w' = w + n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3 + \cdots$$

sein. Ein Beispiel möge dies erläutern. Fig. 55 stelle eine dreifach zusammenhängende Fläche vor, die Querschnitte seien ab und cd, die Periodicitätsmoduln für dieselben resp. A_1 und A_2, so genommen, dafs der Übergang von der einen Seite des Querschnittes auf die andere längs einer geschlossenen Curve in der Richtung der wachsenden Winkel geschehe. Bezeichnet man dann den Werth,

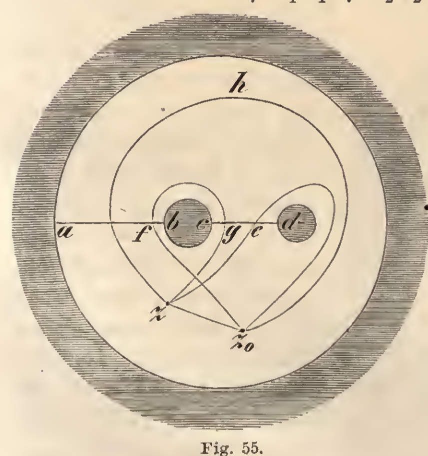


Fig. 55.

den die Funktion w auf einem Wege erlangt, dadurch, dafs man den Weg dem Buchstaben w in Klammern hinzufügt, so ist

$$w(z_0 e z) = w(z_0 z) + A_2$$
$$w(z_0 f g z) = w(z_0 z) - A_1 + A_2$$
$$w(z_0 h z) = w(z_0 z) + A_1.$$

Es erhellt hieraus, dafs die Integralfunktion

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

eine Vieldeutigkeit ganz besonderer Art besitzt, nämlich dafs die verschiedenen Werthe, welche sie für denselben Werth von z annehmen kann, sich nur um Vielfache constanter Gröfsen von einander unterscheiden. Nimmt man nun die inverse Funktion, d. h. betrachtet man z als Funktion von w, so ist diese eine periodische Funktion, da sie ungeändert bleibt, wenn man das Argument w um beliebige Vielfache der Periodicitätsmoduln vermehrt oder vermindert. Hierdurch rechtfertigt sich auch der Name Periodicitätsmodul, da man der Sprache der Zahlentheorie analog sagen kann, dafs z für solche Werthe von w gleiche Werthe erhält, welche nach einem Periodicitätsmodul einander congruent sind, d. h. deren Differenz gleich einem Vielfachen des Periodicitätsmoduls ist.

§ 59.

Wir haben bisher angenommen, die Querschnitte seien so gezogen, dafs keiner von ihnen durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Wenn nun dies aber der Fall ist, z. B. so wie in Fig. 56, wo der eine Querschnitt ad durch den zweiten ce in die beiden Abschnitte ac und cd getheilt wird, so kann es vorkommen, dafs der Periodicitätsmodul B_1 des einen Theils ac von dem B_2 des andern Theils cd verschieden ist. Denn B_1 ist gleich dem Integral $\int f(z)\, dz$ auf die Linie b_1 bezogen, B_2 gleich

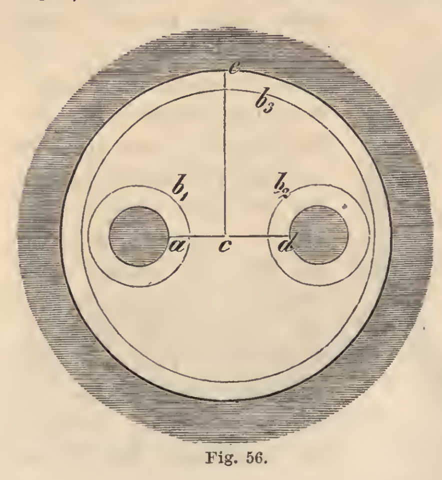


Fig. 56.

demselben Integrale auf b_2 ausgedehnt. Haben nun diese Integrale verschiedene Werthe, so sind auch die Periodicitätsmoduln B_1 und B_2 verschiedene. Dann bleibt also der Periodicitätsmodul nicht längs eines ganzen Querschnittes constant, sondern nur von einem Knoten des Schnittnetzes bis zum nächsten. Dem Querschnitte ce gehört nun auch ein Periodicitätsmodul B_3 an, wir haben daher drei Periodicitätsmoduln, trotzdem unsere Fläche nur zwei Querschnitte zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende nöthig hat. Allein in einem solchen Falle bestehen immer Beziehungen zwischen den einzelnen Periodicitätsmoduln. In unserem Beispiele ist das Integral ausgedehnt auf b_3 gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf b_1 und b_2 (§ 19), und daher

$$B_3 = B_1 + B_2;$$

wir haben also in der That nur zwei von einander unabhängige Periodicitätsmoduln, d. h. eben so viele, als Querschnitte vorhanden sind.

Um nun im Allgemeinen zu zeigen, dafs es immer nur so viele von einander unabhängige Periodicitätsmoduln giebt, als Querschnitte, erinnern wir daran, dafs die Querschnitte meist auf mehrfache Weise gezogen werden können. Immer aber giebt es eine Art der Zerschneidung, bei welcher kein Querschnitt durch einen späteren in Abschnitte getheilt wird. Denn dies wird stets erreicht, sobald jeder Querschnitt in einem Punkte der ursprünglichen Begrenzung beginnt und auch in einem solchen endet. Ist die Fläche geschlossen und daher nur durch einen einzigen Punkt begrenzt (§ 46), so braucht man nur jeden Querschnitt in diesem Begrenzungspunkte beginnen und endigen zu lassen.

Sei nun eine $(n + 1)$fach zusammenhängende Fläche zuerst so durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten worden, dafs dabei kein Querschnitt durch einen andern in Theile zerlegt wird; dann haben wir bei dieser Zerschneidungsart gerade so viel Periodicitätsmoduln als Querschnitte. Diese seien

$$A_1, \; A_2, \cdots A_n.$$

Zweitens sei dieselbe Fläche auf eine andere beliebige Art zerschnitten worden. Zerfallen dabei einzelne Querschnitte in Theile mit verschiedenen Periodicitätsmoduln, so ist die Anzahl der letzteren gröfser als n; seien dieselben

$$B_1, \; B_2, \cdots B_m; \qquad m > n.$$

Läſst man nun die Variable z von einem beliebigen Punkte z_0 aus eine geschlossene Linie beschreiben, welche nur einen Querschnitt des ersten Systemes überschreitet, für welchen A_k der Periodicitätsmodul sei, und bezeichnen w_0 und w die Werthe, welche die Funktion beim Beginn und nach Vollendung der geschlossenen Linie hat, so ist

$$w = w_0 + A_k.$$

Denkt man nun aber die Fläche auf die zweite Art zerschnitten, so kann dieselbe geschlossene Linie mehrere Querschnitte des zweiten Systemes überschreiten; der Werth von w wird daher nach § 58 auch in der Form

$$w = w_0 + h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots\cdots + h_m B_m$$

enthalten sein müssen, wo die h positive oder negative ganze Zahlen (Null eingeschlossen) bedeuten. Demnach ist

$$A_k = h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots\cdots + h_m B_m.$$

Läſst man umgekehrt die Variable z von z_0 aus eine geschlossene Linie durchlaufen, welche nur einen Querschnitt des zweiten Systemes überschreitet, für welchen der Periodicitätsmodul B_λ sei, so ist der Endwerth der Funktion einmal

$$w_0 + B_\lambda,$$

wird aber, wenn man auf die Überschreitungen der Querschnitte des ersten Systemes Rücksicht nimmt, auch in der Form

$$w_0 + g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots\cdot + g_n A_n$$

enthalten sein, worin die g ebenfalls positive oder negative ganze Zahlen (oder Null) bedeuten. Hieraus folgt

$$B_\lambda = g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots\cdot + g_n A_n.$$

Wir erhalten demnach zwischen den beiden Systemen der Periodicitätsmoduln A und B folgende zwei Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = h_1' B_1 + h_2' B_2 + \cdots\cdot + h_m' B_m \\ A_2 = h_1'' B_1 + h_2'' B_2 + \cdots\cdot + h_m'' B_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = h_1^{(n)} B_1 + h_2^{(n)} B_2 + \cdots\cdot + h_m^{(n)} B_m \end{array}\right\} \text{I.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = g_1' A_1 + g_2' A_2 + \cdots\cdot + g_n' A_n \\ B_2 = g_1'' A_1 + g_2'' A_2 + \cdots\cdot + g_n'' A_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_m = g_1^{(m)} A_1 + g_2^{(m)} A_2 + \cdots\cdot + g_n^{(m)} A_n \end{array}\right\} \text{II.}$$

Da nun der Annahme nach $m > n$ ist, so kann man aus II. die n Gröfsen A eliminiren und erhält dadurch $m - n$ Beziehungen zwischen den Gröfsen B. Da man aber diese Beziehungen auch dadurch erhalten kann, dafs man die Werthe der A aus I. in II. substituirt, so müssen sie homogene lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten sein. Demnach ergiebt sich: wenn frühere Querschnitte durch spätere in Theile zerlegt werden, für welche die Periodicitätsmoduln verschiedene Werthe haben, sodafs im Ganzen m Periodicitätsmoduln existiren, während nur n Querschnitte vorhanden sind, so bestehen zwischen diesen m Periodicitätsmoduln $m - n$ lineare homogene Bedingungsgleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, und nur n von ihnen, d. h. ebenso viele als Querschnitte existiren, sind von einander unabhängig.

Man kann dasselbe auch ohne Rechnung durch eine einfache Betrachtung einsehen. Nachdem nämlich die Fläche durch die Querschnitte einfach zusammenhängend geworden ist, kann ihre Begrenzung in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden (§ 53, IX). Macht man diesen Umlauf, so treten dabei die Querschnitte und deren Abschnitte in einer bestimmten Reihenfolge auf. Wenn nun bei jedem Querschnitte der Periodicitätsmodul für denjenigen Abschnitt bekannt ist, an den man bei dem Umlaufe zuerst gelangt, so sind dann die Periodicitätsmoduln für die übrigen Abschnitte durch lineare Beziehungen gegeben. Wir zeigen dies nur an einem Beispiele. In der durch Fig. 57 dargestellten vierfach zusammenhängenden Fläche seien ab, cd, ef drei Querschnitte, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Die Buchstaben p, q, r, s, t, u, v, x, y, z sollen die Werthe bedeuten, welche die Funktion w in den entsprechenden, unendlich nahe an den Querschnitten liegenden Punkten besitzt.

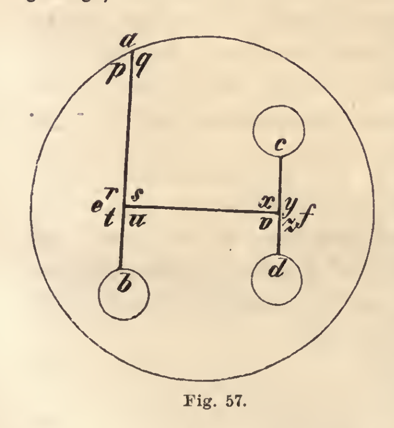


Fig. 57.

Durchläuft man die Querschnitte von a aus in dem Sinne $aefc \cdots$, so seien nun die Periodicitätsmoduln bekannt für die drei Stücke ae, ef, fc, und zwar sei

$$q - p = s - r = A_1, \quad s - u = x - v = A_2, \quad x - y = A_3;$$

gesucht sind die Periodicitätsmoduln für die Stücke eb und fd, also

$$u - t = X_1, \qquad z - v = X_2.$$

Um diese zu finden, bemerke man, dafs da, wo zwei benachbarte Funktionswerthe nicht durch einen Querschnitt von einander getrennt sind, zwischen ihnen Stetigkeit stattfindet, ihr Unterschied also unendlich klein ist. Demnach kann man setzen

$$t - r = 0, \qquad z - y = 0.$$

Damit wird nun

$$X_1 = u - t = u - r = (s - r) - (s - u) = A_1 - A_2$$
$$X_2 = z - v = y - v = (x - v) - (x - y) = A_2 - A_3,$$

wodurch X_1 und X_2 durch A_1, A_2, A_3 ausgedrückt sind.

§ 60.

Wir haben bisher angenommen, dafs aus der z-Fläche sämmtliche Unstetigkeitspunkte durch kleine Umhüllungen ausgeschieden seien, sodafs die Funktion $f(z)$ in der entstehenden Fläche T endlich blieb. Nun wollen wir aber zeigen, dafs es in der That nicht nothwendig ist, alle auszuschliefsen, und untersuchen, bei welchen dies nicht zu geschehen braucht.

Der Periodicitätsmodul A für irgend einen Querschnitt ist, wie § 58 gezeigt wurde, der Werth des Integrales $\int f(z)\,dz$ ausgedehnt über eine geschlossene Linie b, welche von der einen Seite des Querschnittes durch das Innere der einfach zusammenhängenden Fläche T' auf die andere Seite desselben Querschnittes führt. Nun kann aber dieses Integral in vielen Fällen den Werth Null haben. Denken wir uns, dafs die Linie b eine aus der z-Fläche ausgeschiedene Stelle umgiebt, die einen Unstetigkeitspunkt a (der nicht zugleich Verzweigungspunkt ist) der Funktion $f(z)$ enthielt. Alsdann hat das Integral $\int f(z)\,dz$ nach § 42 nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher angiebt, wie $f(z)$ unendlich wird, das Glied

$$\frac{c'}{z - a}$$

vorhanden ist; in allen übrigen Fällen wird das Integral gleich Null. Letzteres findet also z. B. statt, wenn $f(z)$ in a unendlich wird wie

$$\frac{c''}{(z - a)^2}$$

oder wie

$$\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \frac{c^{(n+1)}}{(z-a)^{n+1}} + \cdots\cdots,$$

wo n eine von 1 verschiedene positive ganze Zahl bedeutet. In einem solchen Falle bleibt nun die Funktion w beim Überschreiten des Querschnittes stetig, daher ist es nicht nothwendig, die Unstetigkeitsstelle auszuschliefsen, und der Querschnitt braucht gar nicht gezogen zu werden. Denkt man sich z. B. ein einfach zusammenhängendes Stück der z-Fläche, in welchem nur Unstetigkeitspunkte der in Rede stehenden Art enthalten sind, so erhält das Integral $\int f(z)\,dz$ auch auf zwei Wegen, die einen solchen Unstetigkeitspunkt einschliefsen, denselben Werth, weil es, um den Unstetigkeitspunkt herum genommen, den Werth Null hat (§ 18). Innerhalb eines solchen Flächenstücks ist daher die Funktion

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

ebenfalls eine eindeutige Funktion der oberen Grenze, wie wenn das Flächenstück gar keine Unstetigkeitspunkte enthielte.

Dies ist die eine Art der Unstetigkeitspunkte, die nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Gehen wir zu Verzweigungspunkten über, so erhält das Integral $\int f(z)\,dz$ längs der geschlossenen Linie b den Werth Null, wenn diese einen Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung umgiebt, in welchem $f(z)$ von keiner höheren Ordnung unendlich wird, als von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ (§ 21), und überhaupt, wenn in dem Ausdrucke, welcher angiebt, wie $f(z)$ in dem Verzweigungspunkte unendlich wird, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich ist, fehlt (§ 42). In diesem Falle braucht also der Unstetigkeits- und Verzweigungspunkt ebenfalls nicht ausgeschlossen zu werden, und auch hier fällt dann allemal ein Querschnitt fort. Aber da jetzt die z-Fläche aus mehreren Blättern besteht, so kann sie auch ohne irgend welche Ausschliefsungen mehrfach zusammenhängend sein. Soll dann der Periodicitätsmodul eines Querschnittes einen von Null verschiedenen Werth haben, so mufs die geschlossene Linie b mindestens zwei Verzweigungspunkte umgeben, da sie immer eine Linie sein mufs, die für sich allein noch nicht einen Flächentheil vollständig begrenzt.

Endlich können wir auch entscheiden, wann der unendlich

entfernte Punkt ausgeschlossen werden mufs. Der Werth des Integrals $\int f(z)\,dz$ für eine den Punkt $z=\infty$ umgebende Linie richtet sich (§ 43) nach der Beschaffenheit, welche die Funktion

$$z^2 f(z)$$

für $z=\infty$ hat. Dieser Punkt mufs also ausgeschlossen werden, wenn

$$\lim z f(z)]_{z=\infty} \text{ endlich und von Null verschieden}$$

ist, und überhaupt dann und nur dann, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Wenn nun für eine gegebene Funktion $f(z)$ aus der z-Fläche alle diejenigen Punkte ausgeschlossen worden sind, die nothwendig ausgeschlossen werden müssen, und nur diese, so ist innerhalb der so entstandenen Fläche T das Integral $\int f(z)\,dz$, bezogen auf eine geschlossene Linie, welche für sich allein einen Flächentheil vollständig begrenzt, stets gleich Null. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dafs die geschlossene Linie nicht durch einen Unstetigkeitspunkt oder Verzweigungspunkt hindurchführt.

§ 61.

Es sollen nun zur Erläuterung der vorstehenden Betrachtungen einige Beispiele vorgeführt werden.

1. Der Logarithmus.

Wir erinnern zuerst an die schon § 22 und 23 behandelte Funktion $\log z$, oder an die Integralfunktion

$$w = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Hier ist $f(z) = \frac{1}{z}$ einwerthig, die z-Fläche besteht daher aus einem Blatte. Ferner ist $z=0$ ein Unstetigkeitspunkt, und in ihm ist

$$\lim z f(z) = \lim z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Dieser Punkt mufs daher ausgeschlossen werden. Nimmt man die

z-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so mufs auch der Punkt $z = \infty$ ausgeschlossen werden, weil auch

$$[\lim z f(z)]_{z=\infty} = 1$$

ist. Durch Ausschliefsung dieser beiden Punkte wird die Fläche T zweifach zusammenhängend, und ein Querschnitt, welcher die beiden die Punkte 0 und ∞ umgebenden Kreise verbindet, verwandelt sie in eine einfach zusammenhängende Fläche (Fig. 58). Der Periodicitätsmodul A ist gleich dem Integral

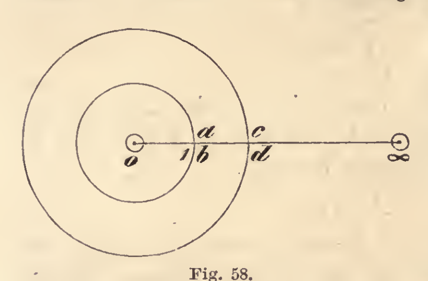


Fig. 58.

$$\int \frac{dz}{z},$$

ausgedehnt auf eine den Nullpunkt in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, er ist also

$$A = 2\pi i.$$

Eine solche Linie umgiebt zugleich auch den Punkt ∞, und für diese erhält man (§ 43)

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i \left[\lim \frac{z^2 \frac{1}{z}}{z}\right]_{z=\infty} = -2\pi i,$$

wenn die Integration in der positiven Begrenzungsrichtung ausgeführt, also der Querschnitt in der entgegengesetzten Richtung überschritten wird, wie vorhin.

2. Der Arcus Tangens.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ebenfalls einwerthig und wird von der ersten Ordnung unendlich für $z = i$ und $z = -i$, dagegen ist für $z = \infty$

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{1+z^2} = \lim \frac{1}{z + \frac{1}{z}} = 0.$$

Man braucht daher nur die Punkte $z = i$ und $z = -i$ durch kleine Kreise auszuschliefsen und erhält dann, wenn die z-Fläche im Unendlichen geschlossen angenommen wird, eine zweifach zusammenhängende Fläche, welche sich durch einen die kleinen Kreise um $+i$ und $-i$ verbindenden Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Der Periodicitätsmodul A ist das Integral

$$\int dw$$

ausgedehnt auf eine den Punkt $+i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, und daher, wie schon § 20 ermittelt wurde,

$$A = \pi.$$

Fig. 59.

Dieselbe Linie kann auch angesehen werden als eine, welche den Punkt $-i$ in der Richtung der abnehmenden Winkel umgiebt und liefert dann denselben Periodicitätsmodul.

Nimmt man die z-Fläche nicht im Unendlichen geschlossen an, sondern begrenzt sie durch eine geschlossene Linie, die man dann ins Unendliche sich ausdehnen läfst, so wird die Fläche T durch Ausschliefsung der beiden Punkte $+i$ und $-i$ zu einer dreifach zusammenhängenden. Man mufs also dann zwei Querschnitte anwenden, um sie in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Da nun aber das Integral

$$\int \frac{dz}{1+z^2}$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie entweder den Werth $+\pi$ oder $-\pi$ oder Null hat, je nachdem die Linie den Punkt $+i$ oder $-i$ oder beide in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt (§ 20), so haben die auf die beiden Querschnitte bezogenen Periodicitätsmoduln, je nach der Art, wie sie gezogen werden, entweder die Werthe $+\pi$ und $-\pi$, oder der eine hat den Werth $\pm\pi$ und der andere den Werth Null. Die Funktion $w = \operatorname{arc\,tg} z$ ändert sich daher hier auch nur um Vielfache von π.

Die inverse Funktion $z = \operatorname{tg} w$ ist nun um die Gröfse π periodisch. Die Abbildung der im Unendlichen geschlossen angenommenen z-Fläche auf der Fläche der w geschieht hier in ganz ähnlicher Weise, wie es § 23 bei der Exponentialfunktion gezeigt worden ist; an die Stelle der die Punkte 0 und ∞ einschliefsenden Kreise treten hier nur diejenigen, welche die Punkte

$+i$ und $-i$ umgeben. Nimmt man den Querschnitt, welcher diese Kreise verbindet, längs der Ordinatenaxe verlaufend an, so wird die w-Fläche in Streifen getheilt, welche von Geraden begrenzt werden, die mit der Ordinatenaxe parallel laufen, und durch die Punkte 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ etc. hindurchgehen. In jedem dieser Streifen nimmt die Funktion $z = \operatorname{tg} w$ ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, weil abgesehen von Vielfachen des Periodicitätsmoduls jedem Werthe von z nur ein Werth von w entspricht, da die z-Fläche nur aus einem Blatte besteht.

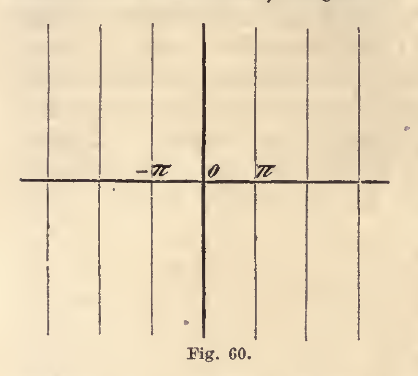


Fig. 60.

Wir wollen nun diese Funktion auch in umgekehrter Weise betrachten, indem wir von der periodischen Funktion ausgehen. Bedeutet $z = \varphi(w)$ eine einwerthige einfach periodische Funktion mit dem Periodicitätsmodul A, d. h. eine einwerthige Funktion, welche die Eigenschaft besitzt, dafs

$$\varphi(w + A) = \varphi(w)$$

ist, so läfst sich die Ebene der w so in Streifen theilen, dafs die Funktion in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe annimmt, und in je zwei in verschiedenen Streifen liegenden Punkten, deren Differenz gleich A oder gleich einem Vielfachen von A ist, gleiche Werthe hat (Fig. 61). Zieht man nämlich eine beliebige, sich selbst nicht schneidende Linie BC, so bilden die Punkte $w + A$, welche durch Addition von A aus den Punkten der Linie BC entstehen, eine dieser parallele Linie DE. Die Funktion φ hat also auf DE dieselben Werthe, wie auf BC. Dasselbe findet auf allen Linien statt, die mit den vorigen in gleichen Entfernungen parallel laufen. Ist ferner w ein Punkt im Innern des Streifens

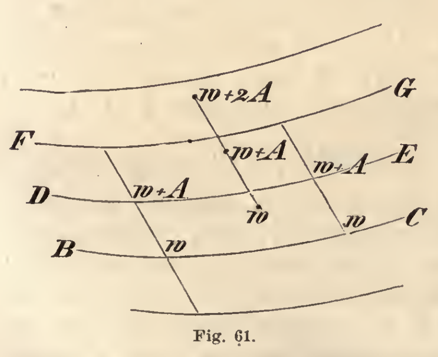


Fig. 61.

$BCDE$, so liegt $w + A$ im Innern des anstofsenden Streifens $DEFG$, $w + 2A$ im Innern des nächstfolgenden Streifens u. s. f. In diesen Punkten hat daher die Funktion wiederum gleiche Werthe. Da nun also je zwei Punkte w und $w + nA$, in denen die Funktion gleiche Werthe hat, in verschiedenen Streifen liegen, so mufs sie in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe erhalten.

Wir wollen nun weiter annehmen, die Funktion $z = \varphi(w)$ werde in einem und demselben Streifen nur in einem endlichen Punkte $w = r$ unendlich grofs von der ersten Ordnung; dann kann man zeigen, dafs sie in jedem Streifen auch nur einmal Null wird und daher auch jeden Werth nur einmal annimmt. Zu dem Ende mögen mit $s, s', s'' \ldots$ die Punkte bezeichnet werden, in denen $\varphi(w)$ innerhalb des betrachteten Streifens Null wird; die Anzahl dieser Punkte sei n und wir wollen annehmen, dafs keiner von ihnen im Unendlichen liegt. Zieht man nun aus zwei Punkten w und $w + c$ auf einer der beiden den Streifen begrenzenden Linien Gerade nach den Punkten $w + A$ und $w + c + A$ der anderen Grenzlinie (Fig. 62), so erhält man ein Parallelogramm mit den Eckpunkten $w, w + c, w + c + A$, $w + A$, und wenn, wie angenommen wurde, die Punkte $r, s, s', s'' \ldots$ alle im Endlichen liegen, so kann man die Punkte w und $w + c$ immer so wählen, dafs $r, s, s' \ldots$ innerhalb des Parallelogramms liegen.

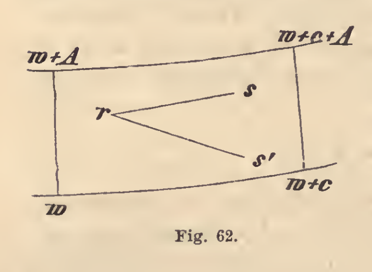


Fig. 62.

Erstreckt man das Integral $\int d \log \varphi(w)$ auf die Begrenzung dieses Parallelogramms, so erhält man, da $\varphi(w)$ innerhalb desselben n Mal Null und einmal unendlich grofs wird, nach § 35 (1)

$$\int d \log \varphi(w) = 2\pi i\,(n - 1).$$

Dieses Integral zerlegt sich in vier Theile, längs der vier Seiten des Parallelogramms. Man bemerke aber, dafs $\int d \log \varphi(w)$ so lange von dem Integrationswege unabhängig ist, als dieser nicht eine der Linien rs, rs' etc. überschreitet, von denen jede die Punkte verbindet, in denen $\varphi(w)$ unendlich oder Null ist (§ 22). Nimmt man es nun längs der Geraden, die von $w + A$ nach w führt, so erhält es hier den Werth Null; denn zunächst wird es gleich $\log \varphi(w) - \log \varphi(w + A)$, allein, da keine der Linien rs überschritten wird, so ist nicht blofs $\varphi(w + A) = \varphi(w)$, sondern auch $\log \varphi(w + A) = \log \varphi(w)$. (Würde eine Linie rs über-

schritten werden, so würde man haben: $\log\varphi(w+A) = \log\varphi(w) \pm 2\pi i$.) Aus demselben Grunde ist auch das Integral Null, das sich auf die von $w+c$ nach $w+c+A$ führende Gerade bezieht. Längs der beiden den Streifen begrenzenden Linien von w bis $w+c$, und von $w+A$ bis $w+c+A$ aber durchläuft $\log\varphi(w)$ die nämlichen Werthe, und da diese Linien im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen sind, so heben die Integrale längs derselben sich auf. Demnach ist das längs der ganzen Begrenzung des Parallelogramms zu nehmende Integral in der vorigen Gleichung gleich Null, woraus

$$n = 1$$

folgt. Die Funktion $\varphi(w)$ wird daher in dem betrachteten Streifen nur einmal Null. Dann kann sie aber auch irgend einen beliebigen Werth k in demselben Streifen nur einmal annehmen, denn bildet man die Funktion $\varphi(w) - k$, so ist diese ebenso periodisch wie $\varphi(w)$ und wird ebenso wie diese nur einmal unendlich für $w = r$, also wird sie in demselben Streifen auch nur einmal Null, d. h. $\varphi(w)$ wird nur einmal gleich k.

Nun kann man nach § 29 setzen

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w-r} + \psi(w), \tag{1}$$

wo c eine gegebene Constante, und $\psi(w)$ eine Funktion bedeutet, die in dem zu betrachtenden Streifen nicht mehr unendlich grofs ist, sondern nur noch in den übrigen Streifen. Daraus folgt

$$\frac{dz}{dw} = \varphi'(w) = -\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w). \tag{2}$$

Da nun $\psi'(w)$ in dem Streifen ebenfalls endlich bleibt, so wird $\frac{dz}{dw}$ auch nur für $w = r$ unendlich grofs, also nur da, wo z unendlich wird, und dies mufs in gleicher Weise von allen Streifen gelten. Während aber z von der ersten Ordnung unendlich grofs ist, ist $\frac{dz}{dw}$ von der zweiten Ordnung unendlich grofs. Betrachtet man also $\frac{dz}{dw}$ als eine Funktion von z, so ist sie nur für $z = \infty$ und zwar von der zweiten Ordnung unendlich grofs. Da ferner z in einem und demselben Streifen jeden Werth nur einmal annimmt, so entspricht in einem und demselben Streifen jedem Werthe von z

nur ein Werth von w. Demnach ist w eine Funktion von z, welche zwar für jeden Werth von z unendlich viele Werthe hat, die sich aber nur um Vielfache des Periodicitätsmoduls, also um constante Gröfsen, von einander unterscheiden. Folglich ist $\frac{dw}{dz}$ eine einwerthige Funktion von z, da die Constanten bei der Differentiation verschwinden. Die reciproke Funktion $\frac{dz}{dw}$ mufs daher ebenfalls eine einwerthige Funktion von z sein. Verbindet man dieses mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich, dafs $\frac{dz}{dw}$ eine einwerthige Funktion von z ist, welche nur für $z = \infty$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich grofs ist. Folglich ist (nach § 31) $\frac{dz}{dw}$ eine ganze Funktion zweiten Grades von z. Eine solche mufs nach § 36 auch zwei Mal den Werth Null annehmen. Bezeichnet man mit a und b die Werthe von z, für welche dieses geschieht, und mit C eine Constante, so ist

$$\frac{dz}{dw} = C(z-a)(z-b) \tag{3}$$

und daher

$$w = \int \frac{dz}{C(z-a)(z-b)}.$$

Demnach ist eine einfach periodische Funktion, welche in jedem Streifen nur für einen endlichen Punkt unendlich grofs von der ersten Ordnung wird, die inverse Funktion des vorstehenden algebraischen Integrals.

In diesem können die Werthe a und b nicht einander gleich sein, denn in diesem Falle würde die Funktion

$$w = \int \frac{dz}{C(z-a)^2}$$

nach § 60 eine einwerthige Funktion der oberen Grenze sein, und dann könnte z nicht eine periodische Funktion sein. Die Constante C läfst sich durch c ausdrücken; denn aus (3) folgt

$$C = \left[\lim \frac{\frac{dz}{dw}}{z^2}\right]_{z=\infty}$$

und mit Benutzung der Gleichungen (1) und (2)

$$C = \left[\lim \frac{-\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w)}{\left(\frac{c}{w-r} + \psi(w)\right)^2} \right]_{w=r}$$

oder

$$C = \lim \frac{-c + (w-r)^2 \psi'(w)}{[c + (w-r)\psi(w)]^2} = -\frac{1}{c}.$$

Hiermit wird

$$w = \int \frac{-c\,dz}{(z-a)(z-b)}.$$

Der Periodicitätsmodul A ist gleich dem Werthe dieses Integrals, wenn es längs einer geschlossenen Linie genommen wird, die entweder den Punkt a oder den Punkt b umgiebt. Integrirt man um a in der Richtung der wachsenden Winkel, so folgt

$$A = 2\pi i \left[\lim \frac{-c(z-a)}{(z-a)(z-b)} \right]_{z=a} = \frac{2\pi i c}{b-a};$$

bei der Integration um b würde man den entgegengesetzten Werth erhalten. Giebt man dem Integral die untere Grenze h, d. h. erhält z in dem Punkte $w = 0$ den Werth h, so hat man, da für $w = r$ und $w = s$ resp. $z = \infty$ und $z = 0$ ist,

$$r = \int_h^\infty \frac{-c\,dz}{(z-a)(z-b)}, \quad s = \int_0^h \frac{+c\,dz}{(z-a)(z-b)}.$$

3. Der Arcus Sinus.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Hier besteht die z-Fläche für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

aus zwei Blättern. Wir haben die zwei Verzweigungspunkte $z = +1$ und $z = -1$, welche zugleich Unstetigkeitspunkte sind. Da in ihnen aber $f(z)$ nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so brauchen diese Punkte nicht ausgeschlossen zu werden, dagegen mufs dies mit $z = \infty$ geschehen, weil

$$\left[\lim \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right] = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

also endlich ist, und zwar mufs in jedem Blatte der Punkt ∞ ausgeschlossen werden, da er kein Verzweigungspunkt ist. Aus diesem Grunde ist es bei diesem Beispiele für den Zusammenhang der Fläche gleichgültig, ob man die beiden Blätter der z-Fläche im Unendlichen geschlossen annimmt, oder ob man in jedem eine geschlossene Linie als Begrenzung gezogen denkt, die man sich dann ins Unendliche ausdehnen läfst. In Fig. 63 ist die letztere Darstellungsart der leichteren Ausführbarkeit wegen gewählt. Der Verzweigungsschnitt ist von -1 nach $+1$ gelegt, und die im zweiten Blatte verlaufenden Linien sind durch Punkte angedeutet. Diese Fläche T ist zweifach zusammenhängend, und der Querschnitt mufs, um die Fläche nicht zu zerstücken, den Verzweigungsschnitt überschreiten. Er ist durch die Linie adc, von welcher der Theil dc im zweiten Blatte verläuft, bezeichnet worden. Der Periodicitätsmodul ist das Integral

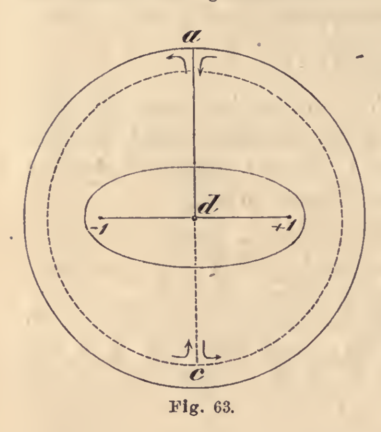


Fig. 63.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ausgedehnt in der Richtung der wachsenden Winkel auf eine geschlossene Linie, welche die beiden Punkte -1 und $+1$, sei es im ersten oder im zweiten Blatte, umgiebt. Nimmt man an, dafs in den Punkten, welche im ersten Blatte in unmittelbarer Nähe des in der Richtung von -1 nach $+1$ genommenen Verzweigungsschnittes auf der linken Seite liegen, der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beigelegt werde, und läfst man die geschlossene Linie im ersten Blatte verlaufen, so kann sie bis zu dem Verzweigungsschnitte verengert werden, und dann wird

$$A = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Wir haben § 43 gesehen, dafs man den Werth dieses Integrals dadurch bestimmen kann, dafs man die geschlossene Linie als eine den Punkt ∞ umgebende betrachtet, und erhält danach

$$A = -2\pi.$$

Für eine im zweiten Blatte verlaufende Linie würde sich ebenso $+2\pi$ ergeben haben; und in der That überschreitet eine im zweiten Blatte in der Richtung der wachsenden Winkel um -1 und $+1$ herumgehende Linie den Querschnitt in entgegengesetzter Richtung, wie eine ebensolche Linie im ersten Blatte. Daher ist die inverse Funktion $\sin w$ des vorliegenden Integrals um 2π periodisch.

Um die Abbildungsart der z-Fläche auf der w-Fläche zu finden, lassen wir z die ganze Begrenzung der Fläche T' in positiver Richtung durchlaufen, von a beginnend, wo w den Werth w_a habe. Wird die im ersten Blatte befindliche äufsere Begrenzung von der Variablen z durchlaufen, so geht w von w_a bis $w_a - 2\pi$ auf einer Curve, deren Gestalt von der Gestalt der Begrenzungscurve in z abhängt (Fig. 64). Jetzt geht z auf der linken Seite der Querschnittsrichtung ac von a nach c, und w von $w_a - 2\pi$ bis zu einem Werthe, der mit w_c bezeichnet werden möge. Wiederum kann die Curve, auf der dies geschieht, je nach der Gestalt des Querschnitts ac verschieden sein. Ferner durchläuft z von c aus die äufsere Begrenzung des zweiten Blattes; dann geht w von w_c nach $w_c + 2\pi$, wo die Übergangscurve auch erst durch die äufsere Begrenzung des zweiten Blattes der z-Fläche bestimmt wird; endlich schliefst z seinen Umlauf, indem es auf der linken Seite der Querschnittsrichtung ca zum Ausgangspunkte zurückkehrt; dann geht auch w von $w_c + 2\pi$ nach w_a zurück; die Curve, auf welcher dies geschieht, mufs dem Wege $(w_a - 2\pi, w_c)$ parallel sein, weil diese beiden Linien den beiden Seiten des Querschnitts entsprechen, und w in je zwei unendlich nahen Punkten der beiden Seiten um 2π verschiedene Werthe hat. Dehnt man jetzt die äufseren Begrenzungen der Fläche T ins Unendliche aus, so rücken auch die Curven $(w_a, w_a - 2\pi)$ und $(w_c, w_c + 2\pi)$ ins Unendliche, und z oder $\sin w$ nimmt seine sämmtlichen Werthe innerhalb eines Strei-

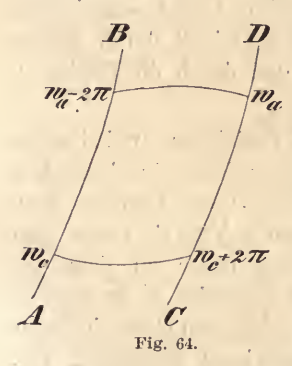


Fig. 64.

fens an, der von den parallelen Curven AB und CD begrenzt wird. In einem solchen nimmt aber z jeden Werth zwei Mal an; denn da die z-Fläche aus zwei Blättern besteht, so gehören, abgesehen von den Periodicitätsmoduln, jedem Werthe von z zwei Werthe von w an, und daher erhält z oder $\sin w$ in zwei verschiedenen Punkten w denselben Werth. Nimmt man den Querschnitt ac längs der Ordinatenaxe verlaufend an, sodaſs zu beiden Seiten desselben $z = iy$ zu setzen ist (wo y reell), so erhält man

$$w = i \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

sodaſs auch w rein imaginär oder um Vielfache des reellen Periodicitätsmoduls 2π von einer rein imaginären Gröſse verschieden ist. Alsdann wird die w-Ebene in Streifen getheilt durch gerade Linien, welche der y-Axe parallel laufen und durch die Punkte 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ etc. hindurchgehen.

Um nun zu bestimmen, in welcher Beziehung zwei Punkte w und w' stehen, welchen in demselben Streifen gleiche Werthe von z entsprechen, lassen wir die letztere Variable zuerst vom Punkte 0 im ersten Blatte zu dem unmittelbar darunter liegenden $0'$ im zweiten Blatte übergeben, ohne den Querschnitt zu überschreiten. Dies kann geschehen (Fig. 65), indem man längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum zunächst auf die andere Seite desselben, und dann über ihn hinüber ins zweite Blatt gelangt. Auf diesem Wege erhält man in $0'$ für w den Werth

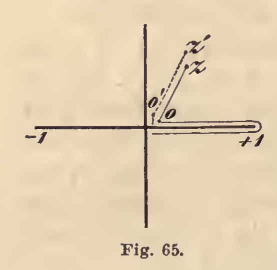


Fig. 65.

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi.$$

Demnach entspricht dem im zweiten Blatte liegenden Punkte $z = 0'$ der Punkt $w = \pi$. Geht man nun im ersten z-Blatte von 0 nach z, so geht w von 0 nach w. Geht aber z im zweiten Blatte von $0'$ nach z', wo z' unmittelbar unter z liegen möge, so geht w mit dem Werthe π aus, und weil in diesem Theile die Quadratwurzel $\sqrt{1-z^2}$ das negative Vorzeichen hat, so wird

$$w' = \pi - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

während

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

war; folglich ist

$$w + w' = \pi,$$

oder die Summe der beiden Werthe von w, für welche z oder $\sin w$ denselben Werth erhält, ist constant gleich dem halben Periodicitätsmodul, abgesehen von Vielfachen des letzteren.

4. Das elliptische Integral.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Hier besteht die z-Fläche ebenfalls aus zwei Blättern, und hat die vier Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. Keiner von diesen braucht ausgeschlossen zu werden, da die Funktion unter dem Integralzeichen in jedem nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird. Auch der Punkt ∞ braucht nicht ausgeschlossen zu werden, da hier

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(1 - k^2 z^2\right)}} = 0$$

ist. Demnach braucht hier gar kein Punkt ausgeschlossen zu werden. Dies hängt damit zusammen, dafs, wie wir schon § 45 sahen, das vorliegende Integral für jeden Werth von z endlich bleibt, und daher nur durch Hinzufügung eines unendlich grofsen Vielfachen eines Periodicitätsmoduls unendlich werden kann. Nehmen wir die z-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so haben wir es also hier mit einer gar nicht (oder nur durch einen beliebigen Punkt) begrenzten Fläche zu thun, die aber mehrfach zusammenhängend ist. Bei einer solchen lassen wir nach § 47 den ersten Querschnitt eine in sich zurücklaufende Linie sein. Denken

wir uns einerseits die Punkte -1 und $+1$, andererseits die Punkte $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ durch Verzweigungsschnitte verbunden*), so nehmen wir zum ersten Querschnitt eine Linie q_1, welche die beiden Punkte -1 und $+1$ im oberen Blatte umgiebt (Fig. 66). Eine solche zerstückt die Fläche nicht, da man von der einen

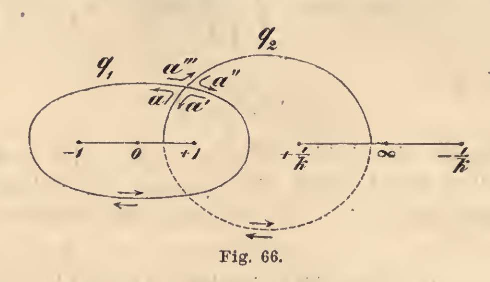


Fig. 66.

Seite derselben zur andern gelangen kann. Die Art, wie dies geschieht (vgl. § 46, 5), giebt uns zugleich an, wie der zweite Querschnitt q_2 zu legen ist, nämlich indem man von einem Punkte a des ersten Querschnitts eine Linie zieht, welche den Verzweigungsschnitt $(-1, +1)$ überschreitet, dadurch in das zweite Blatt gelangt, dann über den andern Verzweigungsschnitt hinüber wieder in das erste Blatt zurückkehrt, und so im Ausgangspunkte, aber auf der anderen Seite des Querschnitts (in a''') endigt. Jetzt bilden diese beiden Linien zusammen einen ununterbrochenen Zug, bei welchem jeder der beiden Querschnitte zwei Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Die Pfeile deuten an, wie dies in positiver Richtung geschieht. In dieser Fläche T' bildet nun jede geschlossene Linie für sich die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und daher ist die Fläche einfach zusammenhängend. Die Begrenzung derselben wird von den beiden Seiten der Querschnitte gebildet. Die ursprüngliche Fläche war also dreifach zusammenhängend.

Der Periodicitätsmodul A_1 für den Querschnitt q_1 ist das Integral $\int dw$, in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche von der einen Seite

*) In Fig. 66 ist gleich angenommen worden, das k reell und kleiner als Eins sei; dann geht der von $+\frac{1}{k}$ nach $-\frac{1}{k}$ führende Verzweigungsschnitt durch ∞ hindurch. Wir werden aber Anfangs k als eine ganz beliebige Gröfse betrachten und erst nachher auf die Annahme zurückkommen, dafs k reell und kleiner als Eins sei.

dieses Querschnittes auf die andere Seite desselben führt, also z. B. längs q_2. Diese Linie kann verengert werden, bis sie zusammenfällt mit zwei geraden Linien, von denen die eine im ersten Blatte von $\frac{1}{k}$ nach 1, und die andere im zweiten Blatte von 1 nach $\frac{1}{k}$ führt. Nehmen wir an, dafs dann im ersten Blatte der Quadratwurzel das Vorzeichen $+$ zugetheilt werde, und setzt man der Kürze wegen

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \varDelta(z,k),$$

so folgt

$$A_1 = \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} - \int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} = -2\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\varDelta(z,k)}.$$

Der Periodicitätsmodul A_2 für den zweiten Querschnitt ist ebenso gleich dem Integral längs der Linie q_1, und diese kann wie im vorigen Beispiele bis an den Verzweigungsschnitt verengert werden und giebt dann wie dort

$$A_2 = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} = -2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\varDelta(z,k)}$$

oder auch, wie man leicht übersieht,

$$A_2 = -4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\varDelta(z,k)}.$$

Das elliptische Integral hat also zwei von einander verschiedene Periodicitätsmoduln; demnach ist die inverse, die sogenannte elliptische Funktion, die nach *Jacobi* mit sin am w bezeichnet wird, doppelt periodisch.

Bilden wir jetzt die Fläche der z auf der Fläche der w ab, so ergiebt sich Folgendes: Geht z von a längs des Querschnittes q_1 in der Richtung der wachsenden Winkel und zugleich in der positiven Begrenzungsrichtung, also im Innern der Linie q_1 wieder nach a zurück (in Fig. 66 von a nach a'), so wächst w von w bis $w + A_2$. Dieser Übergang geschieht auf einer Curve, deren Gestalt von der beliebig zu wählenden Gestalt der Linie q_1 ab-

hängt (Fig. 67); geht nun z weiter längs der Linie q_2 in denselben Richtungen wiederum nach a (also von a' nach a''), so wächst w von $w + A_2$ bis $w + A_1 + A_2$, ebenfalls auf einer Linie, die sich mit der Gestalt von q_2 ändert. Durchläuft dann z von a'' aus die Linie q_1 immer noch in der positiven Begrenzungsrichtung, aber jetzt in der Richtung der abnehmenden Winkel (also von a'' nach a'''), so geht w von $w + A_1 + A_2$ bis $w + A_1$, da es um A_2 abnimmt. Die Curve, auf welcher dieser Übergang von w geschieht, mufs der Curve (w, $w + A_2$) parallel sein, weil in je zwei zu beiden Seiten der Linie q_1 liegenden unendlich nahen Punkten die beiden Werthe von w um die Gröfse A_1 verschieden sind, und daher den beiden Seiten dieses Querschnittes in w zwei verschiedene aber parallele Linien entsprechen. Geht endlich z von a''' längs des Querschnittes q_2 nach a, so geht w von $w + A_1$ nach w auf einer Linie, die aus denselben Gründen wie vorhin der Linie ($w + A_2$, $w + A_1 + A_2$) parallel sein muss. Den beiden Seiten des Querschnittes q_1 entsprechen also die Parallelen (w, $w + A_2$) und ($w + A_1$, $w + A_1 + A_2$), und den beiden Seiten des Querschnittes q_2 die Parallelen (w, $w + A_1$) und ($w + A_2$, $w + A_1 + A_2$). Nun entsprechen sämmtlichen Punkten z auf der ganzen unendlichen z-Fläche nur solche Punkte w, welche innerhalb *) des krummlinig begrenzten Parallelogramms liegen, denn durch jeden beliebigen Punkt der z-Fläche kann man eine Linie legen, welche von der einen Seite von q_1 nach der andern Seite von q_1 führt, ohne einen Querschnitt zu überschreiten; daher führt die entsprechende Linie w von der Linie (w, $w + A_2$) durch das Innere des Parallelogramms nach der Linie ($w + A_1$, $w + A_1 + A_2$). Demnach nimmt z oder sin am w seine sämmtlichen Werthe in diesem Parallelogramm an, und zwar jeden Werth zwei Mal, weil die z-Fläche aus zwei Blättern besteht.

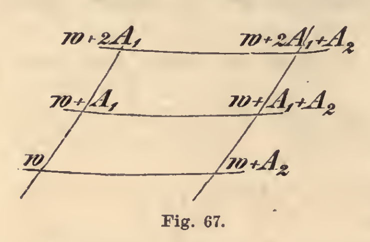


Fig. 67.

An dieses Parallelogramm schliefsen sich nun an allen Seiten andere Parallelogramme an. Denn läfst man z. B. z von a bis nach a''' gehen, so ist w nach $w + A_1$ gegangen. Läfst man nun aber w über den Querschnitt q_1 hinüber sich stetig fortsetzen, so geht jetzt w mit dem Werthe $w + A_1$ aus a aus; an

*) Innerhalb, weil w für alle Werthe von z endlich bleibt.

die Seite $(w + A_1, w + A_1 + A_2)$ schliefst sich daher ein neues Parallelogramm an, in dessen Ecken w die Werthe

$$w + A_1,\ w + A_1 + A_2,\ w + 2A_1 + A_2,\ w + 2A_1$$

hat. Ebenso ist es an den übrigen drei Seiten. Auf diese Weise wird die ganze Ebene der w durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme getheilt. Nimmt man an, dafs k reell und kleiner als 1 ist, so liegen die vier Punkte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ auf der Hauptaxe; verengert man nun die beiden Querschnitte so, dafs sie zu beiden Seiten der Hauptaxe verlaufen, so werden die Parallellinien Gerade, welche resp. der x- und y-Axe parallel laufen. Denn in diesem Falle ist

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

reell; man pflegt den Werth dieses Integrals nach *Jacobi* mit K zu bezeichnen; das andere Integral

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

dagegen ist rein imaginär. Setzt man $\sqrt{1 - k^2} = k'$ und transformirt das Integral durch die Substitution

$$z = \frac{\sqrt{1 - k'^2 z'^2}}{k},$$

so erhält man

$$-i\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1 - z'^2)(1 - k'^2 z'^2)}},$$

was analog mit $-iK'$ bezeichnet wird. Demnach sind die Periodicitätsmoduln, abgesehen vom Zeichen,

$$4K \quad \text{und} \quad 2iK'.$$

Man kann auch hier wieder bestimmen, in welcher Beziehung je zwei Werthe von w stehen, welche demselben Werthe von z, d. h. zwei unmittelbar unter einander liegenden Punkten der

z-Fläche entsprechen. Dem Werthe $z = 0$ im ersten Blatte entspricht $w = 0$. Um nun zu $0'$ im zweiten Blatte zu kommen, kann man sich den Querschnitt q_2 so erweitert denken, dafs er aufser den Punkten 1 und $\frac{1}{k}$ auch noch den Nullpunkt umgiebt. Dann kann man innerhalb T' von 0 längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum auf die andere Seite, und dann über den Verzweigungsschnitt hinüber nach $0'$ kommen (vgl. S. 250), und dann erhält w in $0'$ den Werth

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_1^0 \frac{dz}{\Delta(z,k)} = 2K,$$

ist also gleich der Hälfte des einen Periodicitätsmoduls. Geht man nun weiter von $0'$ nach z', wo z' unmittelbar unter z im zweiten Blatt liege, so ist, wenn der Werth von w in z' mit w' bezeichnet wird,

$$w' = 2K - \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)},$$

während

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

war, und so erhält man

$$w + w' = 2K.$$

Nimmt man das Integral $\int dw$ längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Verzweigungspunkte umgiebt, so verläuft

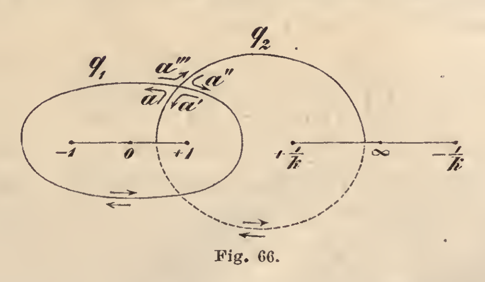


Fig. 66.

eine solche ganz im ersten Blatte und bildet daher für sich allein eine vollständige Begrenzung. Demnach hat dies Integral den Werth Null. Verengert man diese Linie bis zur Hauptaxe, auf

welcher die vier Verzweigungspunkte liegen, so zerlegt sich das Integral in folgende Theile (die Linie möge in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden):

1) Von -1 bis $+1$; 2) von $+1$ bis $+\frac{1}{k}$; 3) von $+\frac{1}{k}$ durch ∞ bis $-\frac{1}{k}$;

6) von $+1$ bis -1; 5) von $+\frac{1}{k}$ bis $+1$; 4) von $-\frac{1}{k}$ durch ∞ bis $+\frac{1}{k}$.

Dabei ist die Quadratwurzel in 6) und 4) negativ zu nehmen, weil bei diesen der Integrationsweg auf der rechten Seite der Verzweigungsschnitte $(-1, +1)$ und $(+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$ liegt, in allen übrigen positiv. Demnach heben sich 2) und 5) auf, und 1) und 3) werden verdoppelt. Da ferner

$$1) = 2\int_0^1 \frac{dz}{\varDelta(z,k)} \qquad 3) = 2\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\varDelta(z,k)}$$

ist, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{dz}{\varDelta(z,k)} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} = 0,$$

und daher

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} = -K.$$

Hieraus folgt auch der Werth des Integrals zwischen den Grenzen 0 und ∞, denn da dieses sich in die Theile $0 \cdots 1,\ 1 \cdots \frac{1}{k},\ \frac{1}{k} \cdots \infty$ zerlegt, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} = K - iK' - K = -iK',$$

oder da man diesem Werthe den Periodicitätsmodul $2iK'$ hinzufügen kann, auch

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\varDelta(z,k)} = iK'.$$

Innerhalb des Parallelogramms mit den Ecken 0, $4K$, $4K + 2iK'$ und $2iK'$ wird also z unendlich für $w = iK'$ und $w = 2K + iK'$.

Wir wollen auch hier nach *Riemann* die Beziehung zwischen der doppelt periodischen Funktion und dem elliptischen Integral in umgekehrter Weise, nämlich von der doppelt periodischen Funktion ausgehend, betrachten. Sei $\varphi(w)$ eine einwerthige doppelt periodische Funktion, also von der Eigenschaft, dafs zugleich

$$\varphi(w + A_1) = \varphi(w) \quad \text{und} \quad \varphi(w + A_2) = \varphi(w)$$

sei. Dann müssen die geraden Linien, welche die complexen Gröfsen A_1 und A_2 darstellen, verschiedene Richtung haben. Denn haben sie gleiche Richtung, so müssen A_1 und A_2 (nach § 2, 3) ein reelles Verhältniss besitzen. Dieses kann entweder rational oder irrational sein. Ist es rational, so sind A_1 und A_2 commensurabel und daher Vielfache einer und derselben Gröfse B. Man kann also setzen

$$A_1 = mB, \qquad A_2 = nB,$$

wo m und n zwei ganze Zahlen bedeuten, die relative Primzahlen zu einander sind, und hat dann

$$\varphi(w) = \varphi(w + mB) = \varphi(w + nB).$$

Da es nun in diesem Falle zwei ganze Zahlen a und b giebt, für welche

$$ma - nb = 1,$$

und da aufserdem

$$\varphi(w + maB - nbB) = \varphi(w)$$

ist, so ist auch

$$\varphi(w + B) = \varphi(w),$$

und daher ist die Funktion $\varphi(w)$ in diesem Falle einfach und nicht doppelt periodisch. Haben aber A_1 und A_2 ein reelles irrationales Verhältniss, sodafs sie incommensurabel sind, so giebt es stets zwei ganze Zahlen m und n, für welche der Modul von

$$mA_1 + nA_2$$

kleiner als eine noch so klein angenommene Gröfse wird*). Da nun auch

*) Setzt man $\frac{A_2}{A_1} = \alpha$, so ist α der Annahme nach reell und irrational. Entwickelt man den absoluten Werth (α) von α in einen Kettenbruch und bezeichnet mit $\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu'}{\nu'}$ zwei aufeinander folgende

$$\varphi(w + mA_1 + nA_2) = \varphi(w)$$

ist, so behält jetzt die Funktion $\varphi(w)$ bei beliebig kleinen Änderungen der Variablen denselben Werth und ist daher eine Constante. Demnach mufs bei einer doppelt periodischen Funktion das Verhältniss der beiden Periodicitätsmoduln imaginär sein, also müssen die Geraden A_1 und A_2 verschiedene Richtung haben. Dann aber kann man die Ebene der w durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme theilen, sodafs $\varphi(w)$ auf je zwei Parallelen dieselben Werthe erhält; sie nimmt dann ferner in jedem Parallelogramm ihre sämmtlichen Werthe an und hat in je zwei entsprechenden Punkten verschiedener Parallelogramme gleiche Werthe.

Da nun die einwerthige Funktion $\varphi(w)$ für irgend einen Werth von w unendlich grofs werden mufs (§ 28), so mufs sie in jedem Parallelogramm unendlich grofs werden. Heben wir daher irgend ein Parallelogramm heraus (Fig. 68), und seien r, r', r'', etc. die Punkte desselben, in welchem $\varphi(w)$ unendlich grofs wird. Bildet man das Integral

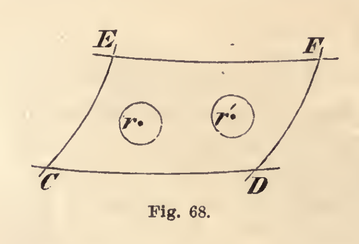


Fig. 68.

$$\int \varphi(w)\,dw,$$

längs der Begrenzung des Parallelogramms genommen, so ist dasselbe (nach § 19) gleich der Summe der Integrale um die Unstetigkeitspunkte r, r', r'', etc. Wird also $\varphi(w)$ in diesen Punkten unendlich, wie resp.

Näherungsbrüche desselben, so ist bekanntlich dem absoluten Werthe nach

$$\left(\frac{\mu}{\nu} - (\alpha)\right) < \frac{1}{\nu\,\nu'},$$

und daher

$$[\mu - \nu\,(\alpha)] < \frac{1}{\nu'}.$$

Da aber die Nenner der Näherungsbrüche unaufhörlich wachsen, so kann man diesen Ausdruck, wenn die Entwickelung hinreichend weit fortgesetzt wird, so klein machen, als man will. Nun ist

$$mA_1 + nA_2 = A_1\,(m + n\alpha);$$

nimmt man daher $m = \mu$ und $n = \mp \nu$, je nachdem $(\alpha) = \pm\,\alpha$ ist, so kann man $m + n\alpha$ und also auch den Modul von $mA_1 + nA_2$ so klein machen, als man will.

$$\frac{c}{w-r}+\cdots,\quad \frac{c'}{w-r'}+\cdots,\quad \frac{c''}{w-r''}+\cdots,\ \text{etc.}$$

so ist

$$\int \varphi(w)\,dw = 2\pi i\,(c+c'+c''+\cdots).$$

Nun hat aber $\varphi(w)$ auf der Seite CE dieselben Werthe wie auf DF, und auf CD dieselben wie auf EF, und beim Durchlaufen der Begrenzung des Parallelogramms werden die parallelen Seiten in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die Integrale längs dieser Seiten heben sich daher auf, und es ist

$$\int \varphi(w)\,dw = 0.$$

Folglich ist auch

$$c+c'+c''+\cdots = 0.$$

Hieraus geht hervor, dafs $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm mehr als ein Mal unendlich werden mufs, und zwar mindestens entweder in zwei Punkten von der ersten Ordnung oder in einem Punkte von der zweiten Ordnung. Bezeichnet im Allgemeinen n die Anzahl, wie oft $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm unendlich grofs wird, so kann zunächst gezeigt werden, dafs $\varphi(w)$ auch jeden Werth h innerhalb eines Parallelogramms n Mal annehmen mufs. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int d\log\,[\varphi(w)-h] \quad \text{oder} \quad \int \frac{\varphi'(w)\,dw}{\varphi(w)-h},$$

ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms. Auch dieses hat den Werth Null, weil sowohl $\varphi(w)-h$ als auch $\varphi'(w)$ auf den gegenüberliegenden Seiten gleiche Werthe haben. Andrerseits aber ist dieses Integral auch gleich der Summe der Integrale, um die Punkte, für welche $\varphi'(w)$ unendlich grofs wird, und um die, in welchen $\varphi(w)-h$ verschwindet. Die ersteren sind dieselben wie die, für welche $\varphi(w)$ oder $\varphi(w)-h$ unendlich wird (§ 29). Ist nun im Allgemeinen α ein Punkt, für welchen $\varphi(w)-h$ entweder unendlich klein oder unendlich grofs wird, und zwar von der $p$ten Ordnung (p positiv beim unendlich klein Werden), so kann man setzen (§ 34).

$$\varphi(w)-h=(w-\alpha)^p\,\psi(w),$$

wo $\psi(w)$ für $w=\alpha$ weder Null noch unendlich ist, und erhält

$$\int d \log [\varphi(w) - h] = p \int \frac{dw}{w - \alpha} + \int \frac{\psi'(w) dw}{\psi(w)}$$
$$= 2\pi i p.$$

Auf das ganze Parallelogramm ausgedehnt ist also

$$\int d \log [\varphi(w) - h] = 2\pi i \Sigma p,$$

und daher

$$\Sigma p = 0.$$

Nun wird $\varphi(w) - h$, wie $\varphi(w)$, n Mal unendlich grofs; bezeichnet man mit m die Anzahl, wie oft es verschwindet, so ist

$$\Sigma p = m - n = 0,$$

und daher

$$m = n.$$

Da also $[\varphi(w) - h]$ n Mal verschwinden mufs, so wird $\varphi(w)$ auch n Mal $= h$.

Wir betrachten nun im Folgenden nur den einfachsten Fall, wo $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm zwei Mal unendlich grofs wird, also auch jeden Werth zwei Mal annimmt, und setzen zuerst voraus, $\varphi(w)$ werde in zwei Punkten r und s unendlich grofs von der ersten Ordnung. Dann kann man setzen, $\varphi(w)$ mit z bezeichnet,

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w - r} + \frac{c'}{w - s} + \psi(w),$$

und weil

$$c + c' = 0$$

sein mufs

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w - r} - \frac{c}{w - s} + \psi(w), \tag{4}$$

wo c eine gegebene Constante bezeichne, und $\psi(w)$ eine Funktion, die in dem betrachteten Parallelogramm nicht mehr, also nur noch in den anderen Parallelogrammen, nämlich in den Punkten $r + mA_1 + nA_2$; $s + mA_1 + nA_2$ (für m und n alle positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt) unendlich wird. Wir suchen nun zuerst die Beziehung zwischen den beiden Werthen w auf, für welche $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält. Zu dem Ende sei

$$v = r + s - w.$$

Setzt man in (4) v statt w, so ist

$$\varphi(v) = \frac{c}{v - r} - \frac{c}{v - s} + \psi(v).$$

Da man aber

$$v - r = -(w - s)$$
$$v - s = -(w - r)$$

hat, so folgt

$$\varphi(v) = -\frac{c}{w - s} + \frac{c}{w - r} + \psi(v),$$

und daher

$$\varphi(w) - \varphi(v) = \psi(w) - \psi(v).$$

Diese Differenz bleibt also in dem ersten Parallelogramme endlich. Nun wird in einem anstofsenden Parallelogramme $\varphi(w)$ unendlich grofs in $w = r + A_1$ und $w = s + A_1$; man kann daher auch setzen

$$\varphi(w) = \frac{c_1}{w - r - A_1} - \frac{c_1}{w - s - A_1} + \psi_1(w),$$

wo jetzt $\psi_1(w)$ für alle Punkte des zweiten Parallelogrammes endlich bleibt. Führt man nun

$$v_1 = r + s + 2A_1 - w$$

ein, so ist

$$w - r - A_1 = -(v_1 - s - A_1)$$
$$w - s - A_1 = -(v_1 - r - A_1),$$

und daher hat man auch

$$\varphi(v_1) = -\frac{c_1}{w - s - A_1} + \frac{c_1}{w - r - A_1} + \psi_1(v_1).$$

Demnach ist

$$\varphi(w) - \varphi(v_1) = \psi_1(w) - \psi_1(v_1)$$

und bleibt innerhalb des zweiten Parallelogramms endlich. Da aber v_1 sich von v nur um das Doppelte des Periodicitätsmoduls A_1 unterscheidet, so ist

$$\varphi(v_1) = \varphi(v), \qquad \varphi(w) - \varphi(v_1) = \varphi(w) - \varphi(v),$$

und daher bleibt die Differenz

$$\varphi(w) - \varphi(v)$$

sowohl in dem ersten, als auch in dem zweiten Parallelogramm endlich. Geht man auf diese Weise von Parallelogramm zu Parallelogramm fort, so zeigt sich, dafs diese Differenz in keinem Parallelogramme, also gar nicht unendlich wird und daher constant sein

mufs. Um den Werth dieser Constanten zu ermitteln, setze man $w = \frac{r+s}{2}$, dann wird

$$v = \frac{r+s}{2} = w,$$

und da die Funktion φ einwerthig ist, auch

$$\varphi(v) = \varphi(w).$$

Da also die Differenz $\varphi(w) - \varphi(v)$ für einen Werth von w den Werth Null hat, so hat sie diesen stets, und daher ist

$$\varphi(r + s - w) = \varphi(w).$$

Demnach sind w und $r + s - w$ die beiden zusammengehörigen Werthe, für welche die Funktion $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält.

Nun folgt aus (4)

$$\varphi'(w) = \frac{dz}{dw} = -\frac{c}{(w-r)^2} + \frac{c}{(w-s)^2} + \psi'(w);$$

also ist die Derivirte $\varphi'(w)$, abgesehen von den Periodicitätsmoduln, auch nur für $w = r$ und $w = s$ unendlich grofs, aber von der zweiten Ordnung. Sie wird daher in jedem Parallelogramme vier Mal unendlich und nimmt also auch jeden Werth vier Mal an. Sie ist ebenfalls eine einwerthige Funktion von w; wichtig aber ist es zu untersuchen, ob sie auch eine einwerthige Funktion von z ist. Nun erhält die Derivirte $\frac{dz}{dw}$ in je zwei entsprechenden Punkten verschiedener Parallelogramme, in denen z gleiche Werthe hat, ebenfalls gleiche Werthe. Man hat also nur die Punkte v und w desselben Parallelogramms zu betrachten. Differentiirt man die Gleichung

$$\varphi(w) = \varphi(v)$$

nach w, so erhält man, da

$$\frac{dv}{dw} = -1$$

ist,

$$\varphi'(w) = -\varphi'(v).$$

Demnach erhält zwar z für v und w gleiche Werthe, $\frac{dz}{dw}$ aber entgegengesetzte, also ist $\frac{dz}{dw}$ nicht eine einwerthige Funktion von z, da es für denselben Werth von z zwei verschiedene Werthe annehmen kann. Da aber diese gleich und entgegengesetzt sind,

so folgt, dafs $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Funktion von z ist. Nun wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, wo auch z unendlich ist, und zwar von der zweiten Ordnung, wo z von der ersten Ordnung unendlich ist; demnach wird $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ an derselben Stelle von der vierten Ordnung unendlich; also ist $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Funktion von z, welche nur für $z = \infty$ und hier von der vierten Ordnung unendlich wird, und folglich eine ganze Funktion vierten Grades von z. Eine solche wird auch vier Mal Null. Bezeichnet man die Werthe von z, für welche dies geschieht, mit α, β, γ, δ, und mit C eine Constante, so ist

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = C(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta), \tag{5}$$

und hieraus folgt

$$w = \int \frac{dz}{\sqrt{C(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}.$$

Eine doppelt periodische Funktion, welche in jedem Parallelogramm zwei Mal von der ersten Ordnung unendlich wird, ist daher die inverse Funktion eines elliptischen Integrals. Die Constante C kann durch c ausgedrückt werden. Denn da nach (5)

$$C = \left[\lim \frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^4}\right]_{z=\infty}$$

ist, so erhält man

$$C = \left[\lim \frac{\left[-\frac{c}{(w-r)^2} + \frac{c}{(w-s)^2} + \psi'(w)\right]^2}{\left[\frac{c}{w-r} - \frac{c}{w-s} + \psi(w)\right]^4}\right]_{w=r}$$

$$= \lim \frac{\left[-c + \frac{c(w-r)^2}{(w-s)^2} + (w-r)^2\psi'(w)\right]^2}{\left[c - \frac{c(w-r)}{w-s} + (w-r)\psi'(w)\right]^4}$$

$$= \frac{c^2}{c^4} = \frac{1}{c^2},$$

und dadurch wird

$$w = \int \frac{c\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}.$$

Dieses Integral gestattet eine ganz ähnliche Behandlung wie das frühere

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

indem hier an Stelle von $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ die vier Verzweigungspunkte α, β, γ, δ treten; es kann auch durch eine Transformation in das letztere übergeführt werden.

Wir gehen nun zu dem Falle über, wo die Funktion $\varphi(w)$ nur in einem Punkte $w = r$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich wird. In diesem Falle mufs man setzen

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{(w-r)^2} + \psi(w);$$

denn das in $(w-r)^{-1}$ multiplicirte Glied mufs fehlen, damit $\int \varphi(w)\,dw$ ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms gleich Null werde. Man schliefst hier ebenso wie oben, indem man $s = r$ setzt, dafs

$$\varphi(2r-w) = \varphi(w)$$

und daher

$$\varphi'(2r-w) = -\varphi'(w)$$

ist. Daher ist $\frac{dz}{dw}$ nicht, wohl aber wieder $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Funktion von z; nun ist

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{2c}{(w-r)^3} + \psi'(w),$$

also wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, und zwar von der 3ten Ordnung, wo z von der zweiten Ordnung unendlich ist. In Beziehung auf z ist also $\frac{dz}{dw}$ für $z = \infty$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$ unendlich, und folglich $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ von der dritten Ordnung. Demnach hat man in diesem Falle

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = C(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Darin ist

$$C = \left[\lim \frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^3}\right]_{z=\infty} = \left[\lim \frac{\left(-\frac{2c}{(w-r)^3} + \psi'(w)\right)^2}{\left(\frac{c}{(w-r)^2} + \psi(w)\right)^3}\right]_{w=r}$$

$$= \lim \frac{[-2c + (w-r)^3\, \psi'(w)]^2}{[c + (w-r)^2\, \psi(w)]^3} = \frac{4c^2}{c^3} = \frac{4}{c};$$

mithin

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = \frac{4}{c}(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$$

und

$$w = \tfrac{1}{2}\int \frac{\sqrt{c}\cdot dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}},$$

welches ebenfalls ein elliptisches Integral ist.

Hiemit brechen wir diese Betrachtungen ab, da es nicht in der Absicht dieses Buches liegt, näher auf die Untersuchung der periodischen Funktionen einzugehen, sondern die behandelten Fälle nur als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen angesehen werden sollen.

Nachträgliche Bemerkung zu dem *Riemann*'schen Hauptsatze über mehrfach zusammenhängende Flächen.

Riemann hat dem nach ihm benannten Satze (§ 49) ursprünglich eine etwas andere und allgemeinere Fassung gegeben, welche mancherlei Vortheile darbietet, indem dadurch eine Schwierigkeit unmittelbar behoben wird, die sonst noch einer ergänzenden Betrachtung bedarf.

Der Unterschied gegen die in § 49 ausgesprochene Form dieses Satzes besteht in Folgendem: Wird die Fläche T einmal durch q_1 Querschnitte erster Art in ein aus α_1 Stücken bestehendes System T_1, und ein anderes Mal durch q_2 Querschnitte zweiter Art in ein aus α_2 Stücken bestehendes System T_2 verwandelt, so wird nur vorausgesetzt, dafs die α_1 Stücke des Systemes T_1 alle einfach zusammenhängend seien, während die α_2 Stücke des Systemes T_2 beliebig sein können; dann gilt die Eigenschaft, dafs $q_2 - \alpha_2$ nicht gröfser als $q_1 - \alpha_1$ sein kann, dafs also

$$q_2 - \alpha_2 \overline{\overline{<}} q_1 - \alpha_1$$

ist.

Bei dem Beweise dieser Eigenschaft bleibt der erste Haupttheil desselben unverändert derselbe wie in § 49 oder § 51. Es wird also durch Übereinanderlegen der beiden Querschnittsysteme ein neues Flächensystem $\mathfrak{T}$ auf doppelte Art erzeugt, und es wird bewiesen, dafs wenn die in T_1 gezogenen Linien zweiter Art hier $q_2 + m$ Querschnitte bilden, auch die Linien erster Art, wenn sie in T_2 gezogen werden, aus $q_1 + m$ Querschnitten bestehen. Da ferner der Annahme nach T_1 aus α_1 einfach zusammenhängenden Stücken besteht, so besteht $\mathfrak{T}$ aus

$$\mathfrak{A} = \alpha_1 + q_2 + m$$

Stücken.

Wäre nun $q_2 - \alpha_2 > q_1 - \alpha_1$, so würde $\alpha_1 + q_2 > \alpha_2 + q_1$ und folglich auch $\alpha_1 + q_2 + m$ oder

$$\mathfrak{A} > \alpha_2 + q_1 + m$$

sein. $\mathfrak{A}$ aber ist die Anzahl der Stücke, aus denen $\mathfrak{T}$ besteht, und $\mathfrak{T}$ wird aus T_2 durch die $q_1 + m$ Querschnitte erster Art erzeugt; demnach würde T_2, welches aus α_2 Stücken besteht, durch $q_1 + m$ Querschnitte in mehr als $\alpha_2 + q_1 + m$ Stücke zertheilt werden, und das ist nicht möglich, weil jeder Querschnitt nur in e i n e m der entstandenen Theile verlaufen und diesen höchstens in zwei Theile theilen kann. Es kann also in der That $q_2 - \alpha_2$ nicht gröfser als $q_1 - \alpha_1$ sein, und tritt der Fall ein,

dafs die Anzahlen α_1 und α_2 der bei beiden Zerschneidungsarten entstandenen Stücke einander gleich sind, so kann q_2 nicht gröfser als q_1 sein.

Besteht umgekehrt T_2 aus lauter einfach zusammenhängenden Stücken (von der Anzahl α_2), während die α_1 Stücke, welche das System T_1 bilden, beliebig sind, so ist

$$q_1 - \alpha_1 \leqq q_2 - \alpha_2.$$

Bestehen daher beide Systeme T_1 und T_2 aus lauter einfach zusammenhängenden Stücken, so kann $q_2 - \alpha_2$ nicht gröfser als $q_1 - \alpha_1$, und $q_1 - \alpha_1$ nicht gröfser als $q_2 - \alpha_2$ sein; daher ist dann

$$q_1 - \alpha_1 = q_2 - \alpha_2;$$

und das ist der Satz des § 49.

Aus der obigen Form des *Riemann*'schen Hauptsatzes ergiebt sich der zweite Satz des § 52, auf welchem die Classification der Flächen beruht, ohne Weiteres. Es wird hier vorausgesetzt, dafs eine mehrfach zusammenhängende Fläche T durch q auf eine bestimmte Art gezogene Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T_1 verwandelt werden kann. Wenn nun (was, wie gezeigt wurde, möglich ist) in T statt der vorigen Querschnitte q andere so gezogen werden, dafs T ebenfalls nicht zerstückt wird, so entsteht wieder eine aus einem einzigen Stücke bestehende Fläche T_2. Diese aber kann nicht mehrfach zusammenhängend sein; denn wäre sie es, so könnte man in ihr mindestens noch einen nicht zerstückenden Querschnitt ziehen (§ 48. II) und erhielte eine aus einem Stücke bestehende Fläche durch $q + 1$ Querschnitte, während die einfach zusammenhängende Fläche T_1 durch q Querschnitte entstanden war; das aber widerspricht dem obigen Satze.

Auch die in § 53. V bewiesene Eigenschaft bedarf, wenn die obige Form des Hauptsatzes zu Grunde gelegt wird, zu ihrem Beweise keines weiteren Hülfsmittels, sondern folgt unmittelbar. Es handelt sich hier um eine $(q + 1)$fach zusammenhängende Fläche T, welche also durch q Querschnitte einfach zusammenhängend wird und durch einen weiteren Querschnitt in zwei Stücke zerfällt. Wird nun statt dessen zuerst ein zerstückender Querschnitt R gezogen, wodurch T in zwei Stücke A und B zerfällt, und werden in diesen dann noch weitere Querschnitte gezogen, so behält man zwei Stücke, wenn weder A noch B durch die neuen Querschnitte zerstückt wird. Dann aber kann die Anzahl dieser neuen Querschnitte nach unserem Satze nicht gröfser als q sein, woraus sich das Uebrige wie in § 53. V ergiebt.










BOUND BY


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 045929103